ESTADÍSTICA BAYESIANA
EJERCICIOS PARA HACER EN CLASE (BAYES)

1. En una ciudad determinada, el 30% de las personas son conservadores, el 50% son liberales y el 20% son independientes. Los registros muestran que en unas elecciones concretas, votaron el 65% de los conservadores, el 82% de los liberales y el 50% de los independientes. Si se selecciona al azar una persona de la ciudad y se sabe que no votó en las elecciones pasadas, ¿cuál es la probabilidad de que sea un liberal?

2. Sea $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, una distribución Poisson, e $Y|x \sim \mathcal{BI}(x, p)$, una distribución binomial con p conocido.

   (a) Demostrar que la media marginal de Y es $E[Y] = \lambda p$.

   (b) Calcular la varianza marginal $V[Y]$.

   (c) Calcular la distribución marginal de Y.

   (d) ¿Cuál es la distribución de $X|y$? Tener cuidado a definir correctamente el soporte de esta distribución. Demostrar que $Z = X - y$ se distribuye como una Poisson dado y.

3. Un médico sugiere un nuevo tratamiento para una forma de cáncer. Con el tratamiento normal un 40% de las pacientes sobreviven más de seis meses después del diagnóstico. El médico cree que dado su nuevo tratamiento, la tasa de supervivencia será mejor. Si θ es la probabilidad de que un paciente, dado el nuevo tratamiento sobreviva más de seis meses, el médico cree que
$$E[\theta] = .45 \quad \text{y} \quad V[\theta] = .012$$

   (a) Demostrar que, se puede representar las creencias del médico con la distribución
   $$\theta \sim \mathcal{B}(9, 11)$$
   (redondeando los parámetros de la distribucíon beta).

   (b) Un año más tarde, 15 pacientes han recibido el tratamiento y 6 de ellos han sobrevivido más que 6 meses. Calcular la distribución a posteriori del médico para θ.

   (c) Evaluar la probabilidad predictiva de que un nuevo paciente tratado con este tratamiento sobreviva más de seis meses.

4. Sea T la proporción de arboles con hojas grandes en un bosque grande. Sus creencias iniciales son que $E[T] = .4$ y $V[T] = .022$ (ajustado con tres decimales).

   (a) ¿Demostrar que una distribución conjugada apropriada para representar sus creencias sobre T es $T \sim \mathcal{B}(4, 6)$?

   (b) Se observa al azar 20 arboles del bosque, y 11 de ellos llevan hojas grandes. ¿Cuál es su distribución a posteriori para T?

5. Cuando los médicos miran secciones del pancreas, se ven "islas". Los datos son los números de islas contenidos en 900 secciones.

Islas	0	1	2	3	4	5	6	>6
Frecuencia	327	340	160	53	16	3	1	0

Suponiendo que el número de islas en cada sección X se distribuye

$$X|\lambda \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

y que se utiliza la distribución inicial $f(\lambda) \propto 1/\lambda$, ¿cuál es la distribución a posteriori de λ?

Calcular la media y varianza de la distribución predictiva del número de islas en una nueva sección.

6. Sea $X|\alpha, \beta \sim \mathcal{G}(\alpha, \beta)$, una distribución gamma.
   (a) Demostrar que $f(x|\alpha, \beta)$ pertenece a una familia exponencial.
   (b) Obtener el núcleo de una distribución conjugada a priori para α, β.
   (c) Dados los datos $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ¿cuál será un estadístico suficiente para α, β?
   (d) Obtener el núcleo de la distribución a posteriori.
   (e) Repetir las partes 6a a 6d suponiendo que α es conocido. ¿ De qué familia de distribuciones pertenece la distribución a posteriori en este caso?

7. Demostrar que

$$f(x|\theta) = \frac{\theta^2}{\theta + 1}(x + 1)\exp(-\theta x) \qquad \theta \geq 0$$

es una función de densidad.
   (a) Demostrar que $f(x|\theta)$ pertenece a una familia exponencial.
   (b) Dada una muestra aleatoria $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ¿Cuál será un estadístico suficiente para θ?
   (c) Obtener el núcleo de la distribución a priori conjugada.
   (d) Obtener el núcleo de la distribución a posteriori.