Universidad Carlos III de Madrid
Ingeniería Técnica en Informática de Gestión
15 de Septiembre de 2006
ESTADÍSTICA

Nota: Justifica todas tus respuestas. En aquellas respuestas en que se necesite un nivel de significación o un nivel de confianza, se usará $\alpha = 0.05$, salvo que se indique otro valor. Responde cada pregunta en hojas diferentes

1. El 5% de las llamadas que se reciben en un centro de atención telefónica son erróneas. Suponiendo que un teleoperador atiende 200 llamadas en un día, calcula:

   (a) Número esperado de llamadas erróneas que recibe el teleoperador en un día.

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que un teleoperador reciba más de 12 llamadas equivocadas en un día?

   SOLUCIÓN:

   (a) Asumiremos que las llamadas son independientes unas de otras. En ese caso, el número de llamadas erróneas en 200 llamadas es una variable aleatoria binomial $X \sim B(200; 0.05)$. Por tanto su media es $E(X) = n \times p = 200 \times 0,05 = 10$ llamadas erróneas al día.

   (b) Se quiere calcular $P(X > 12)$. Como $np(1-p) = 200 \times 0.05 \times 0.95 = 9.5 > 5$, la variable X será, por el teorema central del límite, muy parecida a una normal. Por tanto, tendremos que

   $$X \sim N(10, 9.5).$$

   Entonces, estandarizando, tendremos que

   $$P(X > 12) = P\left(\frac{X-10}{\sqrt{9.5}} > \frac{12-10}{\sqrt{9.5}}\right) = P(z > 0.65) = 0.74.$$

   Por tanto, el 74% de los días el operador atenderá más de 12 llamadas erróneas.

2. El Statgraphics nos devuelve el siguiente resultado sobre una muestra de 70 observaciones de una variable X

```
95,0% confidence interval for mean: 383,0 +/- 59,2742   [323,726;442,274]

95,0% confidence interval for standard deviation: [213,145;298,284]
```

   Responde verdadero o falso a las siguientes cuestiones, justificando tu respuesta

   (a) El intervalo de la desviación típica es válido aunque no sepamos si hay normalidad pues se ha construido con más de 30 datos

   (b) En intervalo de la media es muy ancho, lo que nos hace sospechar que la población no es normal

   (c) Rechazamos que la población tenga media 300 con un nivel de significación del 5%

   (d) La media poblacional es 383 por estar en el centro del intervalo

   (e) El intervalo de la media no es válido pues se basa en la normalidad y no conocemos esa propiedad de X.

   SOLUCIÓN:

(a) FALSO. el intervalo de la desviación típica se basa en la normalidad de la variable aleatoria X. Como no conocemos esa propiedad, no sabemos si es o no válido.

(b) FALSO. La amplitud del intervalo no depende de la normalidad de X, sino del número de datos y de la desviación típica

(c) VERDADERO. El 300 no está incluido en el intervalo de nivel 95%.

(d) FALSO. No conocemos la media poblacional. El centro del intervalo es la media muestral.

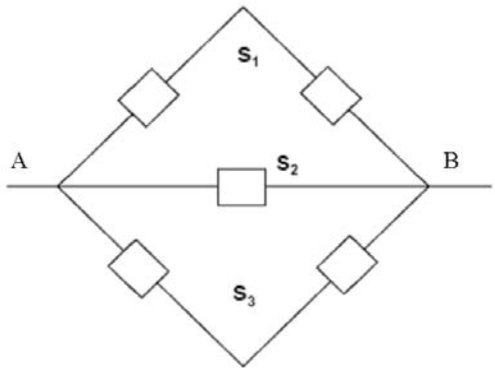
(e) FALSO. El intervalo de la media es válido aunque la variable X no sea normal. Se basa en la normalidad de la media muestral, y ésta se consigue si se tienen más de 30 observaciones.

3. Una red está formada por 3 subsistemas en paralelo como indica el gráfico. La red funciona siempre que haya conexión entre los puntos A y B. Los 5 componentes que se encuentran en la red tienen tiempos de funcionamiento (en horas) independientes, donde cada uno sigue un modelo exponencial de duración media 2 horas

(a) Para cada subsistema S_1,S_2 y S_3, calcula la probabilidad de que funcione más de una hora.

(b) Calcula la probabilidad de que el sistema completo funcione después de una hora.

(c) Calcula la probabilidad de que sólo uno de los tres subsistemas funcione más de una hora.



SOLUCIÓN:

(a) $\lambda = 0.5. P(S_2 > 1) = \exp(-0.5 \times 1) = 0.607$. $P(S_1 > 1) = P[(S_{11} > 1) \cap (S_{12} > 1)] = P(S_{11} > 1)^2 = 0.607^2 = 0.368 = P(S_3 > 1)$

(b) El sistema funciona si funciona algún subsistema. Y falla si fallan todos. Por tanto

$$\begin{aligned} P(S > 1) &= 1 - P(S < 1) = 1 - P[(S_1 < 1) \cap (S_2 < 1) \cap (S_3 < 1)] \\ &= 1 - (1 - 0.368)(1 - 0.607)(1 - 0.368) = 0.843. \end{aligned}$$

(c) $P(\text{sólo 1 funcione}) = \mathrm{P}[(\text{sólo } S_1) \cup (\text{sólo } S_2) \cup (\text{sólo } S_3)] = \mathrm{P}(\text{sólo } S_1) + P(\text{sólo } S_2) + P(\text{sólo } S_3)$

$$\begin{aligned} P(\text{sólo } S_1) &= P[(S_1 > 1) \cap (S_2 < 1) \cap (S_3 < 1)] \\ &= P(S_1 > 1)P(S_2 < 1)P(S_3 < 1) \\ &= 0.368 \times (1 - 0.607) \times (1 - 0.368) = 0.091 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{sólo } S_2) &= P[(S_1 < 1) \cap (S_2 > 1) \cap (S_3 < 1)] \\ &= P(S_1 < 1)P(S_2 > 1)P(S_3 < 1) \\ &= (1 - 0.368) \times 0.607 \times (1 - 0.368) = 0.242 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\text{sólo } S_3) &= P\left[(S_1 < 1) \cap (S_2 < 1) \cap (S_3 > 1)\right] \\
&= P(S_1 < 1)P(S_2 < 1)P(S_3 > 1) \\
&= (1 - 0.368) \times (1 - 0.607) \times 0.368 = 0.091
\end{aligned}$$

y por tanto $P(\text{sólo 1 funcione}) = 2 \times 0.091 + 0.242 = 0.424$