# ESTADISTICA (ITIG) Examen de septiembre de 2004

Soluciones del examen

1) *La velocidad de los microprocesadores de una determinada marca fabricados en una planta es una variable aleatoria que se distribuye según una Normal de media 3 GHz y desviación típica 0,015 GHz. Para poder proceder a su venta, se consideran aceptables los microprocesadores que tienen una velocidad mayor que 2,98 GHz y menor que 3,05 GHz*
   a) *Calcular la probabilidad de que un micro elegido al azar sea aceptable*
   b) *Si se toma al azar una muestra de cuatro micros, ¿cuál es la probabilidad de que sólo haya uno aceptable?*
   c) *Si se toma una muestra de 100 piezas, ¿cuál es la probabilidad de que haya más de 95 aceptables?*

a) La velocidad (v) se distribuye, por tanto según una N(3, 0,015) y la probabilidad de que un microprocesador sea aceptable es:

$$p = P(2{,}98 < v < 3{,}05) = P(v < 3{,}05) - P(v < 2{,}98) = P\left(\frac{v-3}{0{,}015} < \frac{3{,}05-3}{0{,}015}\right) - P\left(\frac{v-3}{0{,}015} < \frac{2{,}98-3}{0{,}015}\right) = P(z < 3{,}33) - P(z < -1{,}33) =$$

$$= P(z < 3{,}33) - (1 - (P(z < 1{,}33)) = 0{,}9995658 - (1 - 0{,}90824) = 0{,}9995658 - 0{,}09176 = 0{,}9078$$

b) La probabilidad de que haya sólo uno aceptable es:

$$P(y = 1) = \binom{4}{1} p^1 (1-p)^3 = 4 \cdot 0{,}9078 \cdot (1 - 0{,}9078)^3 = 0{,}0028$$

c) La probabilidad de que en una muestra de 100 piezas haya más de 95 aceptables es:

$$P(y > 95) \approx P\left(z > \frac{95{,}5 - 90{,}78}{2{,}893}\right) = P(z > 1{,}63) = 1 - P(z < 1{,}63) = 1 - 0{,}94845 = 0{,}05155$$

2) *En una fabrica se reciben 100000 unidades de tornillos, como no se pueden analizar todos, se toma una muestra aleatoria simple de 100 constatándose que su longitud media es de 165 mm, con una cuasi desviación típica de 8*
   a) *Obtener un intervalo de confianza para la media de longitud de la población con un nivel de confianza del 95%*
   b) *Si la muestra hubiera sido de 15 elementos, obtener un nuevo intervalo de confianza (hacer los supuestos que sean necesarios).*
   c) *Con un 90% y el mismo tamaño muestral que en b) ¿rechazaría la hipótesis de que la esperanza del tamaño de los tornillos es 167?*

a) El intervalo sería 163,432 166,568 y se calcula teniendo en cuenta el tamaño de la muestra y que se cuenta con la cuasidesviación típica.

b) El intervalo es 160,58-169,42 y como el tamaño de la muestra es pequeño, sólo 15, hay que hacer el supuesto adicional de que la población es normal, que la media y la cuasi desviación típica se mantienen iguales para poder hacer un intervalo alrededor de la media con una t

c) La definición de las hipótesis será:

$H_0$ : $\mu=167$

$H_1$ : $\mu\neq167$

Entonces, el estadístico de contraste será:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{s}/\sqrt{n}} = \frac{165-167}{8/\sqrt{15}} = -0{,}968$$

Como la región de rechazo es $|t_0| > t_{n-1;\alpha/2} = 2{,}14$ . Por tanto, se está dentro de la región de aceptación y no se rechazaría la hipótesis nula.

También se puede realizar el intervalo de confianza y ver si está dentro.

3) *Un geólogo ha determinado que la probabilidad de encontrar petróleo en tierras graníticas es del 2%, en tierras basálticas del 4% y en tierras volcánicas del 5%. Si se sabe que conociendo que se ha encontrado petróleo la probabilidad de que sea de tierras volcánicas es del 20%, y que sólo el 10% de las tierras son volcánicas ¿Cuál es la probabilidad de encontrar petróleo? (1 punto)*

Llamando E a encontrar petróleo, G a que la tierra sea granítica, B a que sea basáltica y V a que sea volcánica, según el enunciado se sabe que:

P (E/G) = 0,02
P (E/G) = 0,04
P (E/G) = 0,05
P (V/E) = 0,2
P (V) = 0,1

De esta forma,

$$P(V/E) = \frac{P(E/V)\cdot P(V)}{P(E)} \quad \Rightarrow \quad P(E) = \frac{0{,}5\cdot 0{,}1}{0{,}2} = 0{,}025$$

4) *Un gran almacén guarda cajas que contienen ordenadores de distinto tipo. La proporción p de ordenadores con un disco duro de 80 GB en una caja se puede considerar una variable aleatoria con función de densidad:*

*f(p)=k·p·(1-p) con 0≤p≤1*

   a) *Calcular el valor de k, la media y la varianza de la variable aleatoria p*
   b) *Si se toman 10 cajas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguna de ellas contenga una proporción de ordenadores con un disco duro de 80 GB igual o superior al 75%?*

a) Para calcular k,

$$\int_0^1 f(p)dp = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 kp(1-p)dp = k\int_0^1 \left(p - p^2\right)dp = k\cdot\left[\frac{p^2}{2} - \frac{p^3}{3}\right]_0^1 = k\cdot\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - (0)\right] = k\frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad k = 6$$

La esperanza de p es:

$$E[p] = \int_0^1 p\cdot f(p)dp = \int_0^1 p\cdot 6\cdot(p - p^2)dp = 6\int_0^1 \left(p^2 - p^3\right)dp = 6\cdot\left[\frac{p^3}{3} - \frac{p^4}{4}\right]_0^1 = 6\cdot\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Y la varianza:

$$Var[p] = E[p^2] - (E[p])^2 = \int_0^1 p^2 \cdot f(p)dp - \frac{1}{4} = 6\int_0^1 (p^3 - p^4)dp - \frac{1}{4} = 6 \cdot \left[ \frac{p^4}{4} - \frac{p^5}{5} \right]_0^1 - \frac{1}{4} = 6 \cdot \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) - \frac{1}{4} = \frac{6}{20} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

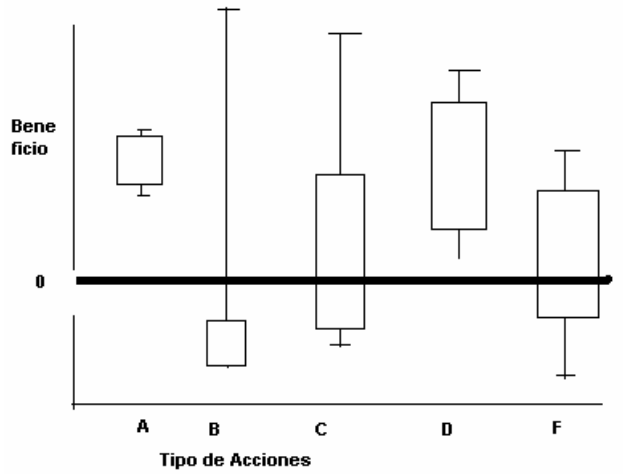
b) La probabilidad de que una caja contenga más del 75% de discos duros de 80 GB es:

$$\int_{0,75}^{1} f(p)dp = \int_{0,75}^{1} 6 \cdot p \cdot (1-p) \cdot dp = 6 \cdot \left[ \frac{p^2}{2} - \frac{p^3}{3} \right]_{0,75}^{1} = 0,15625$$

Por tanto, la probabilidad de no encontrar ninguna caja con esta probabilidad en una muestra de 10 es, según la binomial:

$$P(y=0) = \binom{10}{0} \cdot 0,15625^0 \cdot (1-0,15625)^{10} = 0,183$$

5) *Los siguientes diagramas de caja reflejan la rentabilidad de distintas acciones en la Bolsa.*
   a) *Si se quisiera invertir en bolsa, qué compañía escogería. Justificar la respuesta.*
   b) *¿Cuando escogería A?, ¿y B?*




a) Si lo que quisiera es maximizar el beneficio independientemente del riesgo escogería B, donde el beneficio es máximo. Si tengo mucha aversión al riesgo escogería la opción A, donde los beneficios no son grandes pero se garantizan unos mínimos. Si se quiere arriesgar algo más se optaría por la D o la C de menor a mayor aversión al riesgo

b) Solo se escogería a cuando hay aversión al riesgo y lo importante es garantizar unos mínimos. Se escogerá b cuando lo importante sea alcanzar el máximo beneficio, independientemente de que haya posibilidades de perdidas.

6) *Sabiendo que la probabilidad de contagiarse de tuberculosis si se va a un instituto con 2500 alumnos es del 0,1% ¿Cuál es la probabilidad de que haya más de un infectado?*

Como n es grande y p muy pequeña, se trata de una distribución de Poisson con $\lambda = np = 2,5$. Por tanto, la probabilidad es:

$$P(y > 1) = 1 - P(y \leq 1) = 1 - P(y = 0) - P(y = 1) = 1 - 0,0821 - 0,2052 = 0,7127$$

Haciéndolo directamente con la Binomial se puntuará 0,8.