

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
Ingeniería Técnica en Informática de Gestión
10 de Junio de 2006
ESTADÍSTICA

1. Los accesos a una página web suceden de forma independiente y con un ritmo medio constante de 25 accesos por minuto. La red se colapsa si intentan conectarse más de 300 individuos en un minuto.
- (a) ¿Qué distribución sigue el número de accesos por minuto?
 - (b) ¿Qué proporción del tiempo estará esa red colapsada?
 - (c) Dicha red abre un servicio especial de información. Después de 600 minutos tras la apertura de este nuevo servicio, la red ha contabilizado 20.000 accesos. ¿Puede afirmarse que tras la inauguración del nuevo servicio ha aumentado el número medio de visitas a la web?

SOLUCIÓN:

- (a) X =número de personas que se conectan a la red en un minuto. Al ser los sucesos independientes y de media constante, corresponde a un modelo de Poisson $X \sim \text{Poi}(\lambda = 25 \text{ conexiones/minuto})$.
- (b) Como $\lambda > 5$, por el TCL se tiene que

$$X \sim N(25, 25).$$

Por tanto

$$P(X > 300) = P\left(Z > \frac{300 - 25}{5}\right) = P(Z > 55) \approx 0$$

- (c) Tras el nuevo servicio se tiene que Y =número de accesos por minuto, tendrá una media estimada de

$$\hat{\lambda} = \frac{20000}{600} = 33.33 > 25.$$

Para ver si el incremento respecto a la media poblacional $\lambda = 25$ es significativo hacemos el contraste

$$H_0 : \lambda \leq 25$$

$$H_1 : \lambda > 25$$

La media muestral $\hat{\lambda}$ está basada en 600 datos, por lo tanto podemos hacer el contraste de la media utilizando el teorema central del límite usando la aproximación de que

$$\hat{\lambda} \sim N\left(\lambda, \frac{\sigma}{\sqrt{600}}\right)$$

Además, al tener Y una media estimada tan alta tendrá un comportamiento similar a una normal. Al ser Y una variable de Poisson, la estimación de la varianza coincidirá con la estimación de la media, es decir,

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\lambda}},$$

por lo que el estadístico de contraste será

$$t_0 = \frac{33.33 - 25}{\sqrt{33.33}/\sqrt{600}} = 35.34$$

Si usamos un nivel de significación de $\alpha = 0.05$, rechazamos H_0 si $t_0 > 1.65$, por lo que en nuestro caso rechazamos H_0 incluso si usásemos niveles de significación mucho más pequeños. Hay mucha evidencia a favor de que el tráfico ha aumentado.

2. Un sistema de comunicación binario transmite sólo 0 y 1. Debido al ruido del sistema, a veces un 0 transmitido se recibe como un 1, y un 1 transmitido se recibe como un 0. Suponiendo que la probabilidad de que un 0 se transmita correctamente es 0.94, que la probabilidad de que un 1 se transmita correctamente es 0.91, y que la proporción de 0's transmitidos es 0.45, calcular:

- (a) La probabilidad de que habiendo recibido un 1, haya sido transmitido un 1.
 (b) La probabilidad de que habiendo recibido un 0, haya sido transmitido un 1.

SOLUCIÓN:

- (a) T_1 : se transmite un 1. T_0 : se transmite un 0. R_1 : se recibe un 1. R_0 : se recibe un 0. Los datos que nos proporcionan son $P(R_0|T_0) = 0.94$. $P(R_1|T_1) = 0.91$. $P(T_0) = 0.45$, por lo que $P(T_1) = 0.55$, $P(R_1|T_0) = 0.06$ y $P(R_0|T_1) = 0.09$

$$\begin{aligned} P(T_1|R_1) &= \frac{P(T_1 \cap R_1)}{P(R_1)} = \frac{P(R_1|T_1)P(T_1)}{P(R_1|T_1)P(T_1) + P(R_1|T_0)P(T_0)} \\ &= \frac{0.91 \times 0.55}{0.91 \times 0.55 + 0.06 \times 0.45} = 0.949 \end{aligned}$$

- (b)

$$\begin{aligned} P(T_1|R_0) &= \frac{P(T_1 \cap R_0)}{P(R_0)} = \frac{P(R_0|T_1)P(T_1)}{P(R_0|T_1)P(T_1) + P(R_0|T_0)P(T_0)} \\ &= \frac{0.09 \times 0.55}{0.09 \times 0.55 + 0.94 \times 0.45} = 0.10 \end{aligned}$$

3. Una variable aleatoria X que representa la duración en minutos de las llamadas realizadas en un locutorio público tiene por Función de Distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0; & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{25}; & \text{si } 0 < x \leq 5 \\ 1; & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

Se pide:

- (a) Calcula la probabilidad de que una llamada dure más de tres minutos.
 (b) Calcula la función de densidad de la variable.
 (c) Calcula la duración media de una llamada.
 (d) Calcula la probabilidad de que una llamada que ha superado los tres minutos de duración concluya antes del minuto 4

SOLUCIÓN:

- (a) $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - 9/25 = 0.64$

- (b) $f(x) = 2x/25$ entre 0 y 5

- (c)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^5 \frac{2x^2}{25}dx = \frac{2}{25} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^5 = 3.33$$

- (d)

$$\begin{aligned} P(X < 4|X > 3) &= \frac{P[(X < 4) \cap (X > 3)]}{P(X > 3)} = \frac{P(3 < X < 4)}{P(X > 3)} \\ &= \frac{P(X < 4) - P(X < 3)}{P(X > 3)} = \frac{\frac{4^2}{25} - \frac{3^2}{25}}{0.64} = 0.44 \end{aligned}$$