Tema 2, 3 y 4

Bernardo D'Auria

Departamento de Estadística

Universidad Carlos III de Madrid

GRUPO 82 - INGENIERÍA INFORMÁTICA

3 Diciembre 2008

Ejercicio

T2-JN12

Comprueba que el problema lineal

$$\begin{array}{ll} \min_x & x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 \\ \text{s.a} & 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 \geq -2 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \geq 0 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

no está acotado. Si te sirve de ayuda, puedes comenzar en el vértice $x = (1\ 0\ 2\ 1\ 0)^T$.
¿Cuáles de las siguientes restricciones hacen que el problema esté acotado?

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 & \leq & 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 & \leq & 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 & \leq & 8 \end{array}$$

¿Por qué?

Ejercicio

T2-JN13

Resuelve por el método de las dos fases el siguiente problema lineal:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & x_1 - x_3 + x_4 \\ \text{sujeto a} \quad & -2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Solucion

$$x = (0, 2, 2/3, 1/3)^T, \quad c^T x = -1/3.$$

Ejercicio

T3-JN2 - 1/2

Una empresa fabrica tres productos 1, 2 y 3, que deben procesarse en dos tipos de maquinaria denominadas A y B. En la siguiente tabla se recogen los tiempos de procesamiento (por tonelada procesada) con cada máquina, los beneficios (por tonelada procesada) en euros, y la disponibilidad de cada tipo de maquinaria (en horas por semana):

Tipo de maquinaria	Productos 1	2	3	Disponibilidad (horas)
A	2	5	4	70
B	3	4	6	86
Benef./ton. (euros)	800	700	950	

La empresa considera aumentar la disponibilidad de tiempo de procesamiento de la maquinaria. Para ello, puede llevar a cabo alguna de las posibilidades indicadas a continuación

Tipo de maquinaria	A		B	
Incremento de disp. (horas)	10	15	8	12
Coste inversión (miles de euros)	1600	1700	1700	1750

A lo sumo, se puede realizar un tipo de incremento para cada máquina. Gracias a un estudio de mercado se conocen los límites de demanda de los productos, que son

Producto	Demanda (ton.) mínima	máxima
1	6	17
2	3	8
3	7	20

Además, la inversión total no puede exceder de 3400000 euros.

Ejercicio

T3-JN2 - 2/2

Se pide:

(a) Formular el problema que se debe plantear la dirección de la empresa para obtener el plan de procesamiento e inversión de mayor beneficio.

(b) Si la empresa desease aumentar la disponibilidad de un sólo tipo de maquinaria, cómo se modifica el modelo anterior reflejando tal situación?

(c) Si no se quiere añadir disponibilidad de B a menos que se añada de A, cómo se representa esta nueva condición?

(d) La empresa desea ampliar la disponibilidad con la maquinaria B si, y sólo si, se incrementa también la A. Cómo debe modificarse la condición considerada en el apartado anterior?

SOLUCIÓN - A)

Mín $800x_1 + 700x_2 + 950x_3 - 1600\delta_{A1} - 1700\delta_{A2} - 1700\delta_{B1} - 1750\delta_{B2}$

$$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 70 + 10\delta_{A1} + 15\delta_{A2}$$

$$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 86 + 8\delta_{B1} + 12\delta_{B2}$$

$$\delta_{A1} + \delta_{A2} \leq 1$$

$$\delta_{B1} + \delta_{B2} \leq 1$$

$$6 \leq x_1 \leq 17, \quad 3 \leq x_2 \leq 8, \quad 7 \leq x_3 \leq 20$$

$$1600\delta_{A1} + 1700\delta_{A2} + 1700\delta_{B1} + 1750\delta_{B2} \leq 3400$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\delta_{A1}, \delta_{A2}, \delta_{B1} \in \{0, 1\}$$

SOLUCIÓN - B)

Mín $800x_1 + 700x_2 + 950x_3 - 1600\delta_{A1} - 1700\delta_{A2} - 1700\delta_{B1} - 1750\delta_{B2}$

$$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 70 + 10\delta_{A1} + 15\delta_{A2}$$

$$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 86 + 8\delta_{B1} + 12\delta_{B2}$$

$$\delta_{A1} + \delta_{A2} \leq 1$$

$$\delta_{B1} + \delta_{B2} \leq 1$$

$$6 \leq x_1 \leq 17, \quad 3 \leq x_2 \leq 8, \quad 7 \leq x_3 \leq 20$$

$$1600\delta_{A1} + 1700\delta_{A2} + 1700\delta_{B1} + 1750\delta_{B2} \leq 3400$$

$$\delta_{A1} + \delta_{A2} + \delta_{B1} + \delta_{B2} \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\delta_{A1}, \delta_{A2}, \delta_{B1} \in \{0, 1\}$$

SOLUCIÓN - C)

Mín $800x_1 + 700x_2 + 950x_3 - 1600\delta_{A1} - 1700\delta_{A2} - 1700\delta_{B1} - 1750\delta_{B2}$

$$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 70 + 10\delta_{A1} + 15\delta_{A2}$$

$$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 86 + 8\delta_{B1} + 12\delta_{B2}$$

$$\delta_{A1} + \delta_{A2} \leq 1$$

$$\delta_{B1} + \delta_{B2} \leq 1$$

$$6 \leq x_1 \leq 17, \quad 3 \leq x_2 \leq 8, \quad 7 \leq x_3 \leq 20$$

$$1600\delta_{A1} + 1700\delta_{A2} + 1700\delta_{B1} + 1750\delta_{B2} \leq 3400$$

$$\delta_{A1} + \delta_{A2} + \delta_{B1} + \delta_{B2} \leq 1$$

$$\delta_{B1} + \delta_{B2} \leq \delta_{A1} + \delta_{A2}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\delta_{A1}, \delta_{A2}, \delta_{B1} \in \{0, 1\}$$

SOLUCIÓN - D)

Mín $800x_1 + 700x_2 + 950x_3 - 1600\delta_{A1} - 1700\delta_{A2} - 1700\delta_{B1} - 1750\delta_{B2}$

$$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 70 + 10\delta_{A1} + 15\delta_{A2}$$

$$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 86 + 8\delta_{B1} + 12\delta_{B2}$$

$$\delta_{A1} + \delta_{A2} \leq 1$$

$$\delta_{B1} + \delta_{B2} \leq 1$$

$$6 \leq x_1 \leq 17, \quad 3 \leq x_2 \leq 8, \quad 7 \leq x_3 \leq 20$$

$$1600\delta_{A1} + 1700\delta_{A2} + 1700\delta_{B1} + 1750\delta_{B2} \leq 3400$$

$$\delta_{A1} + \delta_{A2} + \delta_{B1} + \delta_{B2} \leq 1$$

$$\delta_{B1} + \delta_{B2} = \delta_{A1} + \delta_{A2}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\delta_{A1}, \delta_{A2}, \delta_{B1} \in \{0, 1\}$$

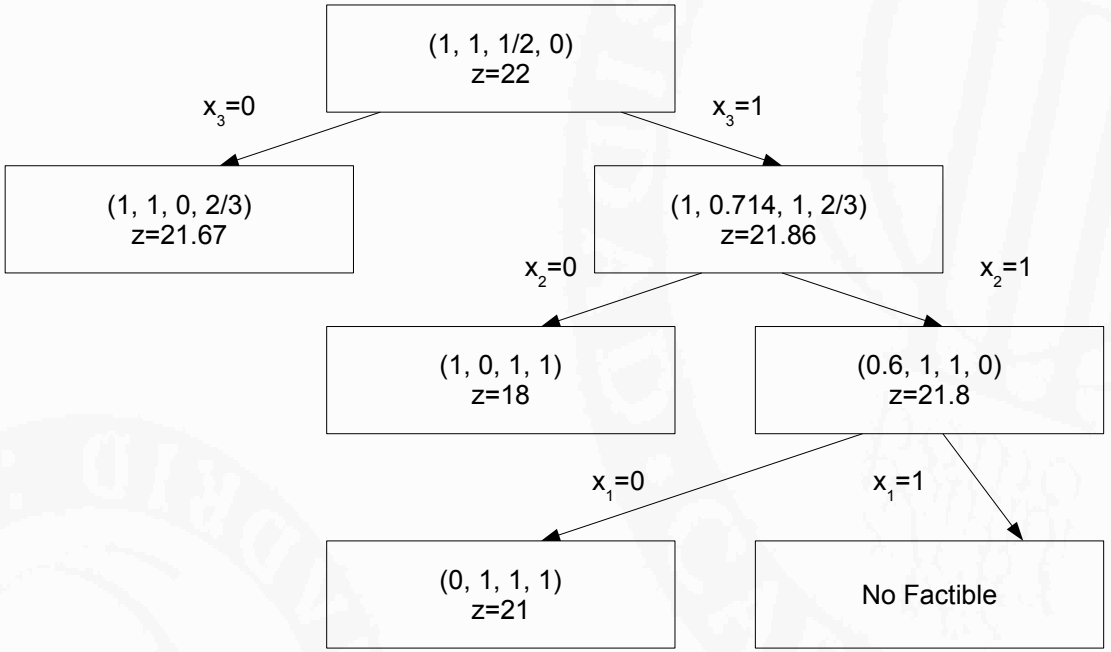
Ejercicio

T3-BD1

Resuelve, aplicando el método de “branch and bound”, el siguiente problema entero:

$$\begin{array}{ll} \max & 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\ \text{s.a} & 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ & x \geq 0, \text{ binarias.} \end{array}$$

Solución

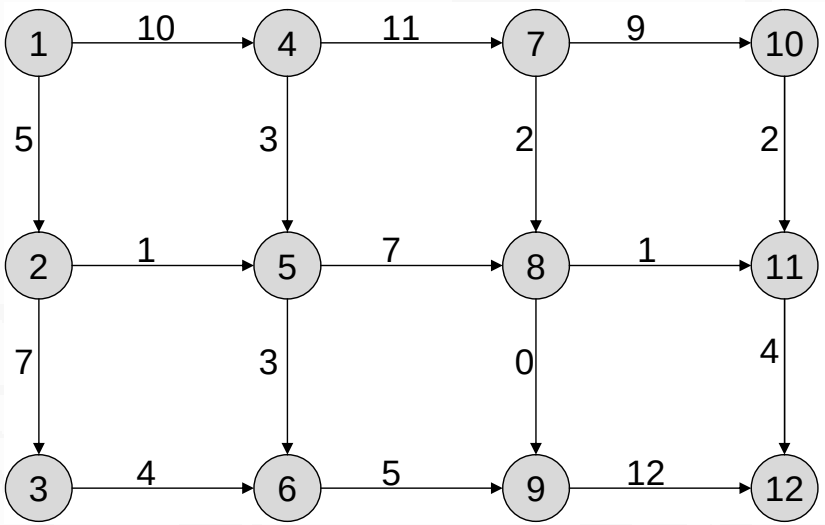


$$x = (0, 1, 1, 1)^T, \quad c^T x = 21.$$

Ejercicio

T4-JN4

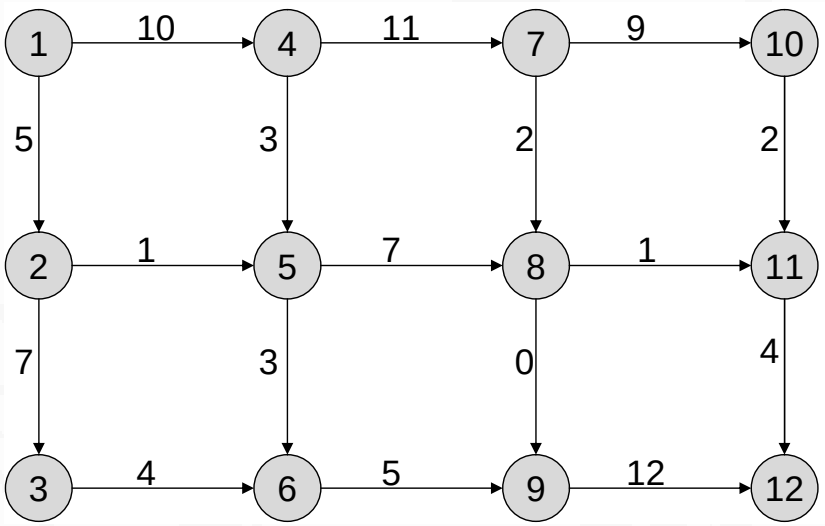
En la red de la figura, encuentra el camino más corto desde el nodo 1 al nodo 12.



Ejercicio

T4-JN4

En la red de la figura, encuentra el camino más corto desde el nodo 1 al nodo 12.



Solución.

(1,2,5,8,11,12)

Ejercicio

1/2 - T4-JN6

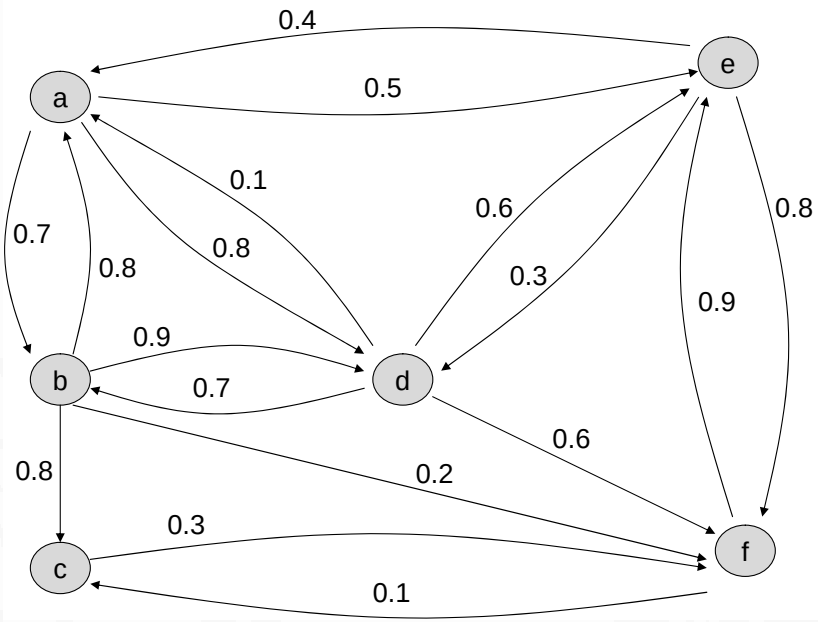
Uno de los mayores problemas que se plantea en internet es decidir por donde enviar los ficheros que reciben los distintos servidores. Una visión miope o local del asunto podría llevar a que cada router enviase los mensajes por la conexión que tenga menos congestionada en cada momento. Esto nos puede llevar a retrasar los envíos. Otra posibilidad es que cada router tenga definida una tabla, de forma que cada vez que le llegue un fichero con un destino determinado sepa por qué línea tiene que enviar dicho fichero.

En la práctica, existen diversas alternativas para construir esta tabla. Una de las primeras y más extendidas consiste en lo siguiente. Cada cierto tiempo (pocos minutos) cada enrutador envía al resto de los servidores información sobre la saturación de las conexiones que salen de ese servidor (se informa sobre el nivel de ocupación de cada línea en %). Con toda esta información se resuelve el problema de encontrar el camino de distancia mínima entre cualquier par de enrutadores, donde la distancia de un camino se define como la suma de la saturación de todas las líneas que lo forman. Con esta solución se crea una tabla para cada enrutador con dos entradas: “destino final” y “siguiente enrutador en el camino óptimo". De esta forma, cuando a un enrutador le llega un nuevo fichero, consulta en la tabla cuál es el siguiente enrutador que le corresponde según el destino final del fichero.

Ejercicio

2/2 - T4-JN6

Supongamos que tenemos una red con los siguientes enrutadores (nodos), conectados entre sí según se muestra en la figura:

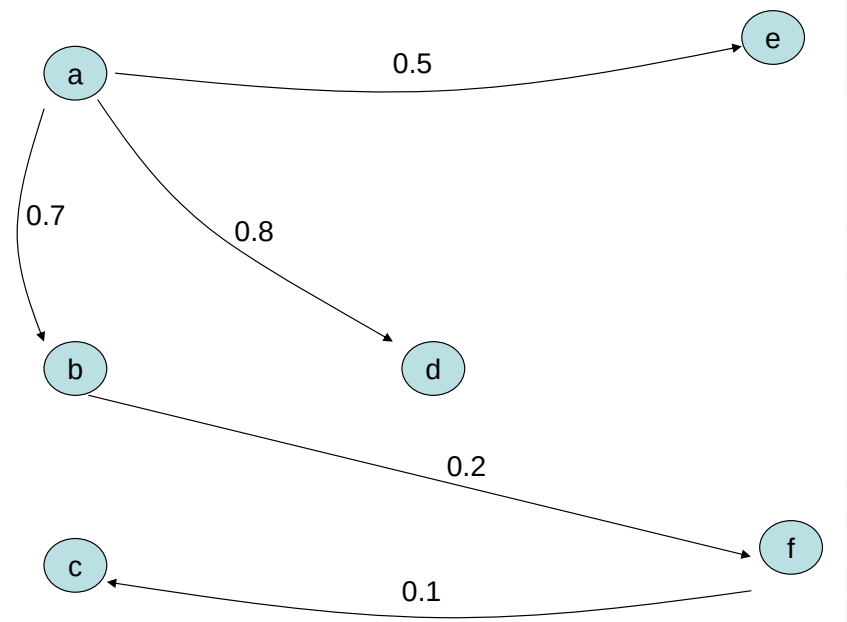


La etiqueta asignada a cada arco representa el nivel de saturación (en tanto por uno).
Construye la tabla de enrutamiento del nodo *a* de acuerdo con el esquema expuesto anteriormente.

¿por qué no tenemos en cuenta de dónde ha salido el fichero para determinar cuál es el siguiente enrutador que le corresponde?, >por qué sólo tenemos en cuenta cuál es su destino final?

Solución.

Para construir la tabla de enrutamiento del nodo a debemos calcular el árbol de caminos mínimos de a al resto de los nodos del grafo utilizando como pesos las saturaciones de los arcos utilizando, por ejemplo, el algoritmo de Dijkstra.
En la figura siguiente se muestra un árbol de caminos mínimos:



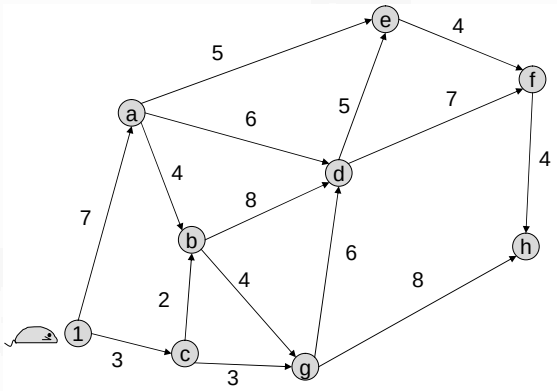
A partir de este árbol podemos construir la siguiente tabla de enrutamiento:

destino	b	c	d	e	f
mandar a	b	b	d	e	b

Ejercicio

T4-JN9

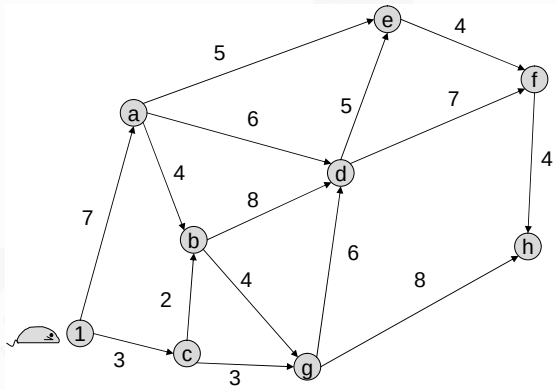
El siguiente grafo muestra un complejo de túneles, y los números que están al lado de los arcos representan las longitudes de los túneles. Queremos dejar una porción de queso en algún nodo de la red de manera que el ratón que se encuentra en el nodo 1 tarde lo máximo posible a encontrarlo, teniendo en cuenta que es un excelente rastreador.



Ejercicio

T4-JN9

El siguiente grafo muestra un complejo de túneles, y los números que están al lado de los arcos representan las longitudes de los túneles. Queremos dejar una porción de queso en algún nodo de la red de manera que el ratón que se encuentra en el nodo 1 tarde lo máximo posible a encontrarlo, teniendo en cuenta que es un excelente rastreador.



Solución.

Para resolver este problema basta con encontrar el árbol de caminos mínimos desde 1 al resto de los nodos, y escoger el nodo cuyo camino correspondiente sea el más largo.