Tema 4: Flujos en redes y Optimisación Combinatoria

Bernardo D'Auria

Departamento de Estadística

Universidad Carlos III de Madrid

GRUPO 82 - INGENIERÍA INFORMÁTICA

17 de Noviembre 2008

Ejercicio

JN5

Una empresa se dedica al tratamiento de docmentos bancarios. El proceso que sigue un documento cuando se recibe en la empresa es: lectura por escáner (OCR) y grabación en un disco óptimo. Para realizar cada una de estas operaciones, la empresa dispone de varios equipos:

OCR La empresa dispone de dos OCRs distintos, el primero tarda 10 milisegundos en leer un documento y el segundo, de mayor calidad, es capaz de leer un documento en 8 milisegundos.

Grabadoras Tres grabadoras G1, G2 y G3, que graban un documento a una velocidad de 7,8 y 10 milisegundos por documento, respectivamente.

Cada uno de los aparatos anteriores se han ido comprando en distintos momentos y, por tanto, sus especificaciones no son siempre compatibles. Por ello, ha sido necesario instalar una interface a la salida de cada OCR que permita transmitir un documento desde el OCR hasta las grabadoras. La siguiente tabla muestra cuáles son los tiempo de transmisión entre el OCR y las grabadoras (en milisegundos):

	G1	G2	G3
OCR1	4	1	2
OCR2	5	2	2

Si atendemos al criterio de tiempo de tratamiento de un documento, ¿Qué OCR y qué grabadora deben seleccionarse para que el tiempo de proceso de un documento sea el menor posible?

- Escribe un modelo de programación matemática que permita tomar esta decisión.
- Formula este problema como un problema de caminos mínimos.

Solución

1/2

Si utilizamos variables binarias:

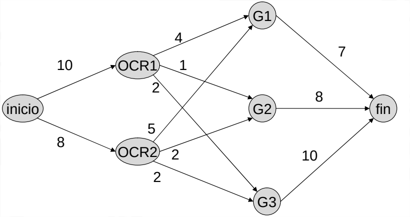
- $o_i, i = 1, 2$ =1 si se usa la OCR i.
- $g_j, j = 1, \ldots, 3$ =1 si se usa la grabadora j.
- $x_{ij}, i = 1, 2; j = 1, \ldots, 3$ =1 si se pasa de la OCR i a la grabadora j

podemos modelar el problema como:

$$\begin{aligned}
\min \quad & 10o_1 + 8o_2 + 4x_{11} + 1x_{12} + \cdots + 2x_{23} + 7g_1 + 8g_2 + 10g_3 \\
\text{s.a} \quad & \sum_{i,j} x_{ij} = 1 \\
& x_{ij} \leqslant o_i \quad \forall i, j \\
& x_{ij} \leqslant g_j \quad \forall i, j \\
& x_{ij}, o_i, g_j \in \{0, 1\} \quad \forall i, j
\end{aligned}$$

Solución 2/2

Podemos representar este problema como encontrar un camino de coste mínimo entre los nodos *inicio* y *fin* en el grafo:



Solución.

inicio$\longrightarrow$fin: (inicio,OCR2,G2,fin).

Ejercicio

JN8

Una compañía de reforestación sembrará árboles en ocho zonas en la misma área. Para esto debe desarrollar un sistema de caminos de tierra para tener acceso a cualquier zona desde cualquier otra. La distancia entre cada par de zonas viene dada en la siguiente tabla:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-	13	21	9	7	18	20	15
2		-	9	18	12	26	23	11
3			-	26	17	25	19	10
4				-	7	16	15	9
5					-	9	11	8
6						-	6	10
7							-	5
8								-

¿Entre qué pares de zonas deben construirse caminos para conectarlas todas con una longitud total mínima de caminos?

SOLUCIÓN

Podemos responder a la pregunta encontrando un árbol de expansión de coste mínimo (MST) en un grafo completo con un nodo por cada zona y pesos en los arcos iguales a la distancia entre las zonas que unen.

Para encontrar el MST podemos usar, por ejemplo, el algoritmo de Kruskal o el de Prim.

Una solución óptima es pavimentar los tramos:

$1-5$, $2-3$, $3-8$, $4-5$, $5-8$, $6-7$ y $7-8$,

lo que supone una distancia total de 52.

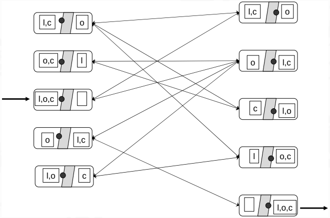
Ejercicio

JN12

Un grangero viaja con un lobo, un cordero y una caja de coles. En un punto de su viaje, debe cruzar el rio, pero la barca de qué dispone no soporta más peso que el del grangero y un animal, o el grangero y la caja. El grangero debe decidir cómo cruzar a los animales y las coles al otro lado del rio, sin dejar en ningún momento solos al lobo con el cordero ni al cordero con las coles.
Representa este problema como el problema de encontrar el camino más corto entre dos nodos de una red.

SOLUCIÓN

Construimos una red con un nodo para cada estado del sistema y arcos conectando aquellos estados entre los que se puede cambiar con un viaje del grangero sin que pase nada:



(Observad que todos los arcos se pueden recorrer en los dos sentidos)
El problema se reduce a encontrar un camino desde el nodo en el que todos estan a un lado del rio al nodo donde todos estan en el otro lado.