Tema 6: Vectores aleatorios

Bernardo D'Auria

Departamento de Estadística

Universidad Carlos III de Madrid

Grupo 71 - I.T.T. Telemática

Otros

Ejercicio

M5

El tiempo total (en horas) que permanece un cliente en un determinado restaurante se divide en:
$Y_1 =$ tiempo de espera hasta que se sirve el primer plato;
$Y_2 =$ tiempo desde ese momento hasta que el cliente sale del restaurante (es decir, tiempo de comer y pagar).
Las variables aleatorias Y_1 e Y_2 tienen distribución conjunta dada por:

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} e^{-(y_1+y_2)}, & 0 \leq y_1, y_2 \leq \infty; \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

Calcular:

a) La probabilidad de que el cliente pase más de una hora en el restaurante;
b) Las distribuciones marginales de Y_1 e Y_2.
c) La probabilidad de que un cliente tarde en ser servido más de una hora.

Ejercicio

M5

El tiempo total (en horas) que permanece un cliente en un determinado restaurante se divide en:
$Y_1 =$ tiempo de espera hasta que se sirve el primer plato;
$Y_2 =$ tiempo desde ese momento hasta que el cliente sale del restaurante (es decir, tiempo de comer y pagar).
Las variables aleatorias Y_1 e Y_2 tienen distribución conjunta dada por:

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} e^{-(y_1+y_2)}, & 0 \leq y_1, y_2 \leq \infty; \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

Calcular:

a) La probabilidad de que el cliente pase más de una hora en el restaurante;
b) Las distribuciones marginales de Y_1 e Y_2.
c) La probabilidad de que un cliente tarde en ser servido más de una hora.

SOLUCIÓN:

a) $\Pr(Y_1 + Y_2 > 1) = 2/e$;
b) $f_{Y_1}(y_1) = e^{-y_1} \quad y_1 \geq 0$ y $f_{Y_2}(y_2) = e^{-y_2} \quad y_2 \geq 0$;
c) $\Pr(Y_1 > 1) = 1/e$.

Ejercicio

M9

Sean X e Y dos variables aleatorias con varianzas

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = 2 \text{ y } \mathbb{V}\mathrm{ar}[Y] = 4$$

y covarianza

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}[X, Y] = -2.$$

Hallar la varianza de la variable aleatoria $Z = 3X - 4Y + 8$.

Ejercicio

M9

Sean X e Y dos variables aleatorias con varianzas

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = 2 \text{ y } \mathbb{V}\mathrm{ar}[Y] = 4$$

y covarianza

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}[X, Y] = -2.$$

Hallar la varianza de la variable aleatoria $Z = 3X - 4Y + 8$.

SOLUCIÓN:

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[Z] = 9\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] + 16\mathbb{V}\mathrm{ar}[Y] - 12\mathbb{C}\mathrm{ov}[X, Y] = 9 \times 2 + 16 \times 4 - 12 \times (-2) = 106$$

Ejercicio

SEP2006 ING. TEL. (C2)

Sean X, Y variables aleatorias independientes, cada una con distribución exponencial con media 1.
Se definen las variables aleatorias U y V como:

$$U = X/(X+Y),$$
$$V = X+Y.$$

Encuentra la función de densidad conjunta de U y V.

Ejercicio

SEP2006 ING. TEL. (C2)

Sean X, Y variables aleatorias independientes, cada una con distribución exponencial con media 1.
Se definen las variables aleatorias U y V como:

$$U = X/(X+Y),$$
$$V = X+Y.$$

Encuentra la función de densidad conjunta de U y V.

SOLUCIÓN:

$$f_{(U,V)}(u,v) = v\,e^{-v} \quad 0 < u < 1,\ v > 0$$

Ejercicio

CPC4A_92_0607(C2)

Sea (X, Y) v.a. bidimensional continuo con X e Y independientes y sea

$$U = \ln X \text{ y } V = \ln Y$$

a) Calcular la función de densidad conjunta $f_{U,V}(u, v)$.

b) Determinar las funciones de densidad marginales.

c) ¿Son U y V independientes? ¿Son incorreladas?

Ejercicio

CPC4A_92_0607(C2)

Sea (X,Y) v.a. bidimensional continuo con X e Y independientes y sea

$$U = \ln X \text{ y } V = \ln Y$$

a) Calcular la función de densidad conjunta $f_{U,V}(u,v)$.

b) Determinar las funciones de densidad marginales.

c) ¿Son U y V independientes? ¿Son incorreladas?

SOLUCIÓN:

a) $f_{U,V}(u,v) = f_X(e^u)\, e^u\, f_Y(e^v)\, e^v$.

b) $f_U(u) = f_X(e^u)\, e^u$ y $f_V(v) = f_Y(e^v)\, e^v$.

c) U y V son independientes y por tanto también incorreladas.

Ejercicio

TELECO.SEP.2003.P2

Una compañía fabrica miras telescópicas cuya desviación del objetivo en mms se mide a través de dos VAs (X, Y) con distribución

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}\right)$$

que indican las dos coordenadas en el plano (y el objetivo es el punto $(0, 0)$). El ejército considera rechazable cualquier mira que no pasa la siguiente prueba: se efectúan tres disparos independientes y si alguno se desvía del objetivo en valor absoluto en más de $1mm$ en cualquiera de las dos coordenadas, se considera que es una mira defectuosa.

a) Calcula la probabilidad de que el ejército considere defectuosa una mira.

b) El proveedor vende al ejército cajas de 20 miras. El ejército considera rechazable cualquier caja con más de dos miras defectuosas. Calcula la probabilidad de que el ejército considere defectuosa una caja.

Ejercicio

TELECO.SEP.2003.P2

Una compañía fabrica miras telescópicas cuya desviación del objetivo en mms se mide a través de dos VAs (X, Y) con distribución

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \right)$$

que indican las dos coordenadas en el plano (y el objetivo es el punto $(0, 0)$). El ejército considera rechazable cualquier mira que no pasa la siguiente prueba: se efectúan tres disparos independientes y si alguno se desvía del objetivo en valor absoluto en más de $1mm$ en cualquiera de las dos coordenadas, se considera que es una mira defectuosa.

a) Calcula la probabilidad de que el ejército considere defectuosa una mira.

b) El proveedor vende al ejército cajas de 20 miras. El ejército considera rechazable cualquier caja con más de dos miras defectuosas. Calcula la probabilidad de que el ejército considere defectuosa una caja.

SOLUCIÓN:

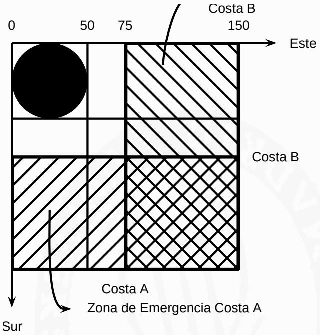
a) $\Pr(\text{una mira defectuosa}) = 1 - 0.8428^2 = 0.28969.$

b) $\Pr(\text{una caja defectuosa}) = 0.99$

Ejercicio

TELECO.FEB.2004.P1

Una mancha de fuel debida a un vertido se encuentra en la situación mostrada en la figura. El avance diario de la mancha en dirección Este viene caracterizado por una $N(20\text{km}, 5\text{km})$, mientras que el avance diario en dirección Sur viene caracterizado por una $N(26\text{km}, 10\text{km})$.



a) ¿Cuál es la probabilidad de que al cabo de tres días la mancha haya alcanzado la costa A?

Si tomamos la v.a. bidimensional Normal formada por los avances en ambas direcciones y con coeficiente de correlación ρ,

b) Considerando $\rho = 0$, ¿cuál es la probabilidad de que en un día la mancha haya llegado la zona de emergencia de las dos costas?

c) Considerando $\rho = 0.25$, ¿cuál es la probabilidad de que en un día la mancha esté más cerca de la costa A que de la costa B?

Solución Teórica: 1/2

a) X : Avance en dirección Este en un día $X \sim \mathrm{N}(20, 5)$
Y : Avance en dirección Sur en un día $Y \sim \mathrm{N}(26, 10)$

$Y_1 + Y_2 + Y_3 \sim \mathrm{N}(3 \times 26, \sqrt{300}) = \mathrm{N}(78, 17.32)$

$$\begin{aligned} \Pr(Y_1 + Y_2 + Y_3 \geq 100) &= \Pr(Z \geq (100 - 78)/17.32) \\ &= 1 - \Pr(Z < 1.27) = 1 - 0.898 = 0.102. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \Pr(X \geq 25, Y \geq 25) &= \Pr(X \geq 25)\Pr(Y \geq 25) \\ &= \Pr(Z \geq (25 - 20)/5)\Pr(Z \geq (25 - 26)/10) \\ &= (1 - \Pr(Z < 1))(1 - \Pr(Z < -0.1)) \\ &= (1 - 0.8413)\Pr(Z < 0.1) = 0.1587 \times 0.5398 = 0.0856. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \Pr(X < Y) &= \Pr(M = X - Y < 0) \\ \mathbb{E}[M] &= \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y] = 20 - 26 = -6 \\ \mathbb{V}\mathrm{ar}[M] &= \mathbb{V}\mathrm{ar}[X] + \mathbb{V}\mathrm{ar}[Y] - 2\mathbb{C}\mathrm{ov}[X, Y] = \mathbb{V}\mathrm{ar}[X] + \mathbb{V}\mathrm{ar}[Y] - 2\rho\,\sigma_X\sigma_Y \\ &= 5^2 + 10^2 - 2 \times 0.25 \times 5 \times 10 = 100 \\ \Pr(M < 0) &= \Pr(Z < (0 + 6)/10) = \Pr(Z < 0.6) = 0.7257. \end{aligned}$$

Ejercicio

TEL.TEC.JUN.2007.P2

Sea el vector aleatorio bidimensional (X, Y) con función de densidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} a, & \text{si } -1 < x < 0,\ -x-1 < y < 1; \\ a + \frac{1}{2}, & \text{si } 0 < x < 1, x-1 < y < 1; \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

a) Determinar a para que $f(x,y)$ sea función de densidad.

b) Calcula la probabilidad de que el producto de ambas variables X e Y sea negativo.

c) Calcula la función de densidad de X.

d) Calcular la función de densidad de $Y|X = 0.5$.

e) Calcular $\mathbb{E}[Y^2|X = 0.5]$

SOLUCIÓN: 1/5

a. Determinar a para que $f(x, y)$ sea función de densidad.

Para que $f_{X,Y}(x, y)$ sea función de densidad se tiene que verificar que $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$ y que $\int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy dx = 1$. Por tanto

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-1}^{0} \left(\int_{-x-1}^{1} a dy \right) dx + \int_{0}^{1} \left(\int_{x-1}^{1} \left(a + \frac{1}{2} \right) dy \right) dx = \\ &= \int_{-1}^{0} a\,(x+2) dx + \int_{0}^{1} \left(a + \frac{1}{2} \right) (-x+2) dx = \\ &= \frac{3}{2} a + \frac{3}{2} a + \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

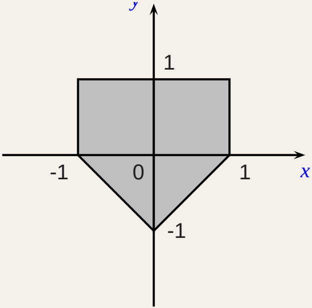
Luego la función de densidad conjunta será:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{12} & \text{si } -1 < x < 0,\ -x-1 < y < 1 \\ \frac{7}{12} & \text{si } 0 < x < 1,\ x-1 < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

SOLUCIÓN: 2/5

a) Determinar a para que $f(x,y)$ sea función de densidad.

Podríamos haber calculado el valor de a por razonamiento geométrico, siendo el recinto



Calculamos el volumen de un prisma:

$$1 \cdot a + \frac{1 \cdot 1}{2} + 1 \cdot \left(a + \frac{1}{2}\right) + \frac{1 \cdot 1}{2}\left(a + \frac{1}{2}\right)$$

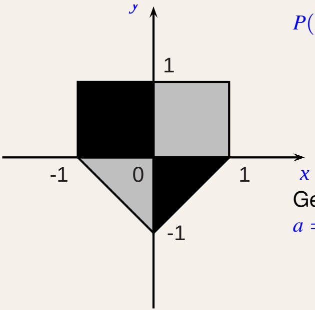
y imponiendo que sea igual a 1 obtenemos que

$$a = \frac{1}{12}.$$

SOLUCIÓN: 3/5

b) Calcula la probabilidad de que el producto de ambas variables X e Y sea negativo.

Sea S el suceso *"el producto de ambas variables X e Y es negativo"*. Sobre el recinto anterior, nos están pidiendo la parte sombreada



$$
\begin{aligned}
P(S) &= P([X<0 \cap Y>0] \cup [X>0 \cap Y<0]) \\
&= \int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{1}\frac{1}{12}dy\right)dx + \int_{0}^{1}\left(\int_{x-1}^{0}\frac{7}{12}dy\right)dx \\
&= \frac{1}{12}+\frac{7}{24}=\frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

Geométricamente, y una vez que sabemos que $a=1/12$,

$$1\cdot\frac{1}{12}+\frac{1\cdot 1}{2}\cdot\frac{7}{12}=\frac{3}{8}$$

SOLUCIÓN: 4/5

c) Calcula la función de densidad de X.

La función de densidad marginal de X es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_{-x-1}^{1} \frac{1}{12} dy = \frac{1}{12}(x+2) & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \int_{x-1}^{1} \frac{7}{12} dy = \frac{7}{12}(-x+2) & \text{si } \quad 0 \leq \text{x} \leq 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Solución Teórica: 5/5

d) Calcular la función de densidad de $Y|X = 0.5$.

La función de densidad de $Y|X = 0.5$ es:

$$f_{Y|X=\frac{1}{2}}(y) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{si } -\frac{1}{2} \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Ya que

$$\text{Si } -\frac{1}{2} \leq y \leq 1 \qquad f_{Y|X=\frac{1}{2}}(y) = \frac{f\left(\frac{1}{2}, y\right)}{f_X\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{7}{12}\left(-\frac{1}{2}+2\right)} = \frac{2}{3}$$

e) Calcular $E[Y^2|X = 0.5]$

$$E\left[Y^2|X = \frac{1}{2}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{Y|X=\frac{1}{2}}(y)dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} y^2 \frac{2}{3} dy = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{24}\right) = \frac{1}{4}$$