# Tema 7: Procesos Estocásticos

Bernardo D'Auria

Departamento de Estadística

Universidad Carlos III de Madrid

## GRUPO 71 - I.T.T. TELEMÁTICA

03 de Junio 2008

# Problema vector discreto

En un sistema de comunicación se utiliza la siguiente señal aleatoria

$$Y(t) = A\sin(\omega t + \Phi) + B$$

donde $\Phi \sim \mathrm{U}[0, 2\pi]$ y la función de masa del vector aleatorio $(A, B)$ es

$$\Pr(A = a, B = b) = \frac{a}{20} \quad a \in \{1, 2, 3\}, b \in \{1, \ldots, a+1\}.$$

Calcula:

a) La media del proceso $Y(t)$
b) La autocorrelación del proceso $Y(t)$
c) Calcula la estacionariedad débil y la ergodicidad del proceso.

# SOLUCIÓN: **a)**

Las funciones de masas marginales de $A$ y $B$ son iguales a

$$P(A=a)=\begin{cases}\frac{1}{10}, & a=1;\\ \frac{3}{10}, & a=2;\\ \frac{6}{10}, & a=3.\end{cases} \qquad P(B=b)=\begin{cases}\frac{3}{10}, & b=1;\\ \frac{3}{10}, & b=2;\\ \frac{1}{4}, & b=3;\\ \frac{3}{20}, & b=4.\end{cases}$$

a) *La media del proceso* $Y(t)$.

$$\begin{aligned}\mu_Y(t)=\mathbb{E}[Y(t)] &= \mathbb{E}[A\sin(\omega t+\Phi)+B]\\ &= \mathbb{E}[A]\,\mathbb{E}[\sin(\omega t+\Phi)]+\mathbb{E}[B]\\ &= \mathbb{E}[B]=\frac{9}{4}.\end{aligned}$$

# SOLUCIÓN: **b)**

b) *La autocorrelación del proceso* $Y(t)$.

$$
\begin{aligned}
R_Y(t, t+\tau) &= \mathbb{E}[(A\sin(\omega t+\Phi)+B)(A\sin(\omega(t+\tau)+\Phi)+B] \\
&= \mathbb{E}[A^2\sin(\omega t+\Phi)\sin(\omega(t+\tau)+\Phi)]+\mathbb{E}[B^2] \\
&\quad +\mathbb{E}[AB\sin(\omega t+\Phi)]+\mathbb{E}[AB\sin(\omega(t+\tau)+\Phi)] \\
&\overset{ind}{=} \mathbb{E}[A^2]\,\mathbb{E}[\sin(\omega t+\Phi)\sin(\omega(t+\tau)+\Phi)]+\mathbb{E}[B^2] \\
&\quad +\mathbb{E}[AB]\,\mathbb{E}[\sin(\omega t+\Phi)]+\mathbb{E}[AB]\,\mathbb{E}[\sin(\omega(t+\tau)+\Phi)] \\
&= \mathbb{E}[A^2]\frac{\cos(\tau\omega)}{2}+\mathbb{E}[B^2] \\
&= \frac{67}{20}\cos(\tau\omega)+\frac{123}{20}.
\end{aligned}
$$

# SOLUCIÓN: **c)**

c) *Calcula la estacionariedad débil y la ergodicidad del proceso.*

El proceso es estacionario en el sentido débil pero no es ergódico. De hecho

$$
\begin{aligned}
\mu_T &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} Y(t)dt = B; \\
R_T(\tau) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} Y(t)Y(t+\tau)d\tau = \frac{A^2}{2}\cos(\tau\omega) + B^2.
\end{aligned}
$$

que quiere decir que la media temporal y la autocorrelación temporal son variables aleatorias y no constantes.