

# Tema 7: Procesos Estocásticos

Bernardo D'Auria

Departamento de Estadística

Universidad Carlos III de Madrid

GRUPO 71 - I.T.T. TELEMÁTICA

30 de Mayo 2008



# Ejercicio

TEL.TEC.SEP.2006.C3

Sean  $X_1, X_2, \dots$  variables aleatorias continuas, independientes, de media nula y varianza uno. Sea  $X(n)$  el proceso estocástico discreto en el tiempo definido por

$$X(n) = \sum_{k=1}^n X_k \text{ con } n = 1, 2, \dots$$

y sea

$$Y(n) = X(n + N) - X(n) \text{ con } N \text{ constante}$$

- Calcular la media y la autocorrelación de  $X(n)$ .
- ¿Es  $X(n)$  estacionario en sentido débil?
- Obtener la función de densidad de primer orden de  $Y(n)$  suponiendo  $N$  grande.



# SOLUCIÓN:

# 1/2

a) Calcular la media y la autocorrelación de  $X(n)$ .

La media de  $X(n)$  viene dada por

$$\mu_X(n) = \mathbb{E}[X(n)] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n X_k\right] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k] = 0$$

que no depende de  $n$ . La autocorrelación de  $X(n)$  por

$$\begin{aligned} R_X(n_1, n_2) &= \mathbb{E}[X(n_1)X(n_2)] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k_1=1}^{n_1} X_{k_1}\right)\left(\sum_{k_2=1}^{n_2} X_{k_2}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}[(X_1 + \dots + X_{n_1})(X_1 + \dots + X_{n_2})] = \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} \mathbb{E}[X_{k_1}X_{k_2}] = \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} w_{k_1 k_2} \end{aligned}$$

$$w_{k_1 k_2} = \begin{cases} \mathbb{E}[X_k^2] = \text{Var}[X_k] + (\mathbb{E}[X_k])^2 = 1, & k_1 = k_2 = k; \\ 0, & k_1 \neq k_2. \end{cases}$$

con lo que

$$R_X(n_1, n_2) = \min(n_1, n_2)$$

que no es función de  $m = n_2 - n_1$ .



# SOLUCIÓN:

## 2/2

b) ¿Es  $X(n)$  estacionario en sentido débil?

$X(n)$  **NO** es estacionario en sentido débil, porque no cumple simultáneamente que la función media no dependa de  $n$  y que a la vez la función de la autocorrelación sólo dependa de  $m = n_2 - n_1$ .

c) Obtener la función de densidad de primer orden de  $Y(n)$  suponiendo  $N$  grande.

Dado que  $Y(n) = X(n+N) - X(n) = \sum_{k=1}^{n+N} X_k - \sum_{k=1}^n X_k = \sum_{k=n+1}^{n+N} X_k$ , por el Teorema Central del Límite se tiene que para  $N$  grande

$$Y(n) \sim N(\mu_Y, \sigma_Y)$$

siendo

$$\mu_Y = \mathbb{E}[Y(n)] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=n+1}^{n+N} X_k\right] = \mathbb{E}[X_{n+1}] + \dots + \mathbb{E}[X_{n+N}] = 0 + \dots + 0 = 0$$

$$\sigma_Y^2 = \text{Var}[Y(n)] = \text{Var}\left[\sum_{k=n+1}^{n+N} X_k\right] \stackrel{\text{ind}}{=} \text{Var}[X_{n+1}] + \dots + \text{Var}[X_{n+N}] = 1 + \dots + 1 = N$$

Por tanto la función de densidad de primer orden de  $Y(n)$  suponiendo  $N$  grande es

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \exp\left(-\frac{1}{2N}y^2\right).$$