Tema 7: Procesos Estocásticos

Bernardo D'Auria

Departamento de Estadística

Universidad Carlos III de Madrid

GRUPO 71 - I.T.T. TELEMÁTICA

27 de Mayo 2008

Problema con v.a. no independientes

Sea

$$X(t) = A \sin(\omega t + \Phi)$$

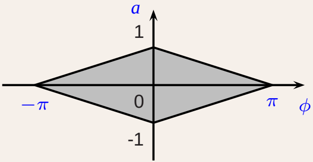
un proceso estocástico con A y Φ dos variables aleatorias con función de densidad conjunta dada por

$$f_{\Phi,A}(\phi, a) = \begin{cases} k, & |\phi| + |\pi a| \leq \pi; \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

a) Determinar la constante k para que $f_{\Phi,A}$ sea una función de densidad.
b) Calcular la función de media y de autocorrelación del proceso $X(t)$.
c) Estudiar la estacionariedad de $X(t)$ en sentido estricto y en sentido débil.

SOLUCIÓN: **a)**

a) *Determinar la constante k para que $f_{\Phi,A}$ sea una función de densidad.*



Descomponiendo la desigualdad $|\pi a| + |\phi| \leq \pi$ en las cuatro desigualdades

$$
\begin{aligned}
a &\leq 1 - \phi/\pi \\
a &\geq -1 - \phi/\pi \\
a &\leq 1 + \phi/\pi \\
a &\geq -1 + \phi/\pi
\end{aligned}
$$

se obtiene el recinto $\mathfrak{R}$ de la función $f_{Phi,A}$ dado en la figura.
Como el área de $\mathfrak{R}$ es igual a 2π resulta que $k = 1/2\pi$.

A continuación vamos a llamar con $\mathfrak{R}^+$ la parte derecha del recinto, es decir $\mathfrak{R}^+ = \mathfrak{R} \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ y con $\mathfrak{R}^- = \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{R}^+$ la parte izquierda.

SOLUCIÓN: **b)** 1/3

b) *Calcular la función media y de autocorrelación del proceso $X(t)$.*

Como las V.A. A y Φ no son independientes tenemos que

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}[A\sin(\omega t + \Phi)] = \iint_{(\phi,a)\in\mathfrak{R}} a\sin(\omega t + \phi) f_{\Phi,A}(\phi,a)\,da\,d\phi$$

$$= \iint_{(\phi,a)\in\mathfrak{R}^-} + \iint_{(\phi,a)\in\mathfrak{R}^+} a\sin(\omega t + \phi)\frac{da\,d\phi}{2\pi}$$

$$= \int_{\phi=-\pi}^{0} \sin(\omega t + \phi) \int_{a=-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} a\frac{da\,d\phi}{2\pi} + \int_{\phi=0}^{\pi} \sin(\omega t + \phi) \int_{a=-(1-\frac{\phi}{\pi})}^{(1-\frac{\phi}{\pi})} a\frac{da\,d\phi}{2\pi}$$

$$= \int_{-\pi}^{0} [\sin(\omega t + \phi) + \sin(\omega t - \phi)] \left(\int_{-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} a\,da \right) \frac{d\phi}{2\pi} = 0$$

siendo

$$\int_{-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} a\,da = \left[\frac{a^2}{2}\right]_{-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} = 0$$

SOLUCIÓN: b) 2/3

De forma análoga para calcular la función de autocorrelación tenemos que

$$R_X(t_1,t_2) = \mathbb{E}[A^2 \sin(\omega t_1 + \Phi)\sin(\omega t_2 + \Phi)] = \iint_{(\phi,a)\in\mathfrak{R}} a^2 \sin(\omega t_1 + \phi)\sin(\omega t_2 + \phi)\,\frac{da\,d\phi}{2\pi}$$

$$= \int_{-\pi}^{0}\int_{-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} a^2[\sin(\omega t_1 + \phi)\sin(\omega t_2 + \phi) + \sin(\omega t_1 - \phi)\sin(\omega t_2 - \phi)]\,\frac{da\,d\phi}{2\pi}$$

y utilizando la fórmula $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$

$$= \int_{-\pi}^{0}\int_{-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} a^2 \cos(\omega(t_1-t_2))\,\frac{da\,d\phi}{2\pi}$$

$$- \int_{-\pi}^{0}\int_{-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} a^2[\cos(\omega(t_1+t_2)+2\phi) + \cos(\omega(t_1+t_2)-2\phi)]\,\frac{da\,d\phi}{4\pi} = I_1 - I_2.$$

La primera integral, I_1, es igual a

$$I_1 = \frac{\cos(\omega(t_1-t_2))}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\left[\frac{a^3}{3}\right]_{-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} d\phi = \frac{\cos(\omega(t_1-t_2))}{3\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(1+\frac{\phi}{\pi}\right)^3 d\phi$$

$$= \frac{1}{12}\cos(\omega(t_1-t_2))$$

SOLUCIÓN: **b)** 3/3

Utilizando la fórmula $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$, la integral I_2 es

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{\cos(\omega(t_1+t_2))}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos(2\phi)\left(\int_{-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} a^2\,da\right)d\phi \\
&= \frac{\cos(\omega(t_1+t_2))}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos(2\phi)\left[\frac{a^3}{3}\right]_{-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} d\phi \\
&= \frac{\cos(\omega(t_1+t_2))}{3\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos(2\phi)\left(1+\frac{\phi}{\pi}\right)^3 d\phi = \frac{\cos(\omega(t_1+t_2))}{3}\int_{0}^{1}\cos(2\pi x-2\pi)x^3\,dx \\
&= \frac{\cos(\omega(t_1+t_2))}{3}\int_{0}^{1}\cos(2\pi x)x^3\,dx
\end{aligned}
$$

y utilizando tres veces la integración por partes obtenemos

$$
= \frac{\cos(\omega(t_1+t_2))}{3}\left(\frac{3}{4\pi^2}\right) = \frac{\cos(\omega(t_1+t_2))}{4\pi^2}
$$

Al final

$$
R_X(t_1,t_2) = \frac{1}{12}\cos(\omega(t_1-t_2)) - \frac{\cos(\omega(t_1+t_2))}{4\pi^2}
$$

SOLUCIÓN: **c)**

c) *Estudiar la estacionariedad de X(t) en sentido estricto y en sentido débil.*

Como $R_X(t_1, t_2)$ no depende solo de $\tau = t_1 - t_2$ sino también de $t_1 + t_2$ el proceso **NO** es estacionario en el sentido débil y por lo tanto tampoco en el sentido estricto.