

Tema 7: Procesos Estocásticos

Bernardo D'Auria

Departamento de Estadística

Universidad Carlos III de Madrid

GRUPO 71 - I.T.T. TELEMÁTICA

23 de Mayo 2008



Ejercicio

El tiempo en minutos que un ordenador tarda en ejecutar una tarea es una v.a.

$Y \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Para hacer un estudio de la evolución temporal del sistema se construye el proceso estocástico $X(t)$ definido como el tiempo que resta para completar la tarea sabiendo que ya ha consumido t minutos.

- Determina $\mathbb{E}[X(t)]$, $\text{Var}[X(t)]$, $\mathbb{E}[X(t)^2]$.
- Indica si cada una de las funciones del apartado anterior depende del tiempo e interpreta el resultado.



Ejercicio

El tiempo en minutos que un ordenador tarda en ejecutar una tarea es una v.a.

$Y \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Para hacer un estudio de la evolución temporal del sistema se construye el proceso estocástico $X(t)$ definido como el tiempo que resta para completar la tarea sabiendo que ya ha consumido t minutos.

- Determina $\mathbb{E}[X(t)]$, $\text{Var}[X(t)]$, $\mathbb{E}[X(t)^2]$.
- Indica si cada una de las funciones del apartado anterior depende del tiempo e interpreta el resultado.

SOLUCIÓN:

El proceso $X(t)$ se define como $X(t) = \max\{0, Y - t\}$.

$$a) \mu_X(t) = \int_0^\infty \max\{0, y - t\} \lambda e^{-\lambda y} dy = \int_t^\infty (y - t) \lambda e^{-\lambda y} dy = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t};$$

$$\text{Var}[X(t)] = \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda t} (2 - e^{-\lambda t});$$

$$\mathbb{E}[X(t)^2] = \frac{2}{\lambda^2} e^{-\lambda t}.$$

- Todas las funciones del apartado anterior dependen de t . Es decir que el proceso



Ejercicio

TEL.TEC.FEB.2007.C3

Sea $X(t)$ un proceso normal y débilmente estacionario con $E[X(t)] = 0$ y función de autocorrelación $R_X(\tau) = 1/(1 + \tau^2)$:

- a) Calcula la probabilidad de que $X(0) + X(1) - X(2)$ sea positivo.
- b) ¿Son $X(0)$ e $Y = X(0) - 2X(1)$ variables aleatorias independientes?. Justifica la respuesta.



SOLUCIÓN:

1/2

a) *Calcula la probabilidad de que $X(0) + X(1) - X(2)$ sea positivo.*

Como $X(t)$ es un proceso normal, entonces la variable aleatoria $X(0) + X(1) - X(2)$ es Normal con media:

$$\mathbb{E}[X(0) + X(1) - X(2)] = \mathbb{E}[X(0)] + \mathbb{E}[X(1)] - \mathbb{E}[X(2)] = 0 + 0 - 0 = 0$$

Dada la simetría de la densidad de una distribución normal respecto a su media, tendremos que

$$\Pr(X(0) + X(1) - X(2) > 0) = \frac{1}{2}$$



SOLUCIÓN:

2/2

b) ¿Son $X(0)$ e $Y = X(0) - 2X(1)$ variables aleatorias independientes?
Justifica la respuesta.

Como $X(t)$ es un proceso estocástico normal, la variable aleatoria bidimensional $(X(0), X(1))$ tiene también distribución normal. Nos preguntan si $X(0)$ e $Y = X(0) - 2X(1)$ son independientes. Entonces la variable aleatoria bidimensional dada por

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(0) \\ X(0) - 2X(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \end{pmatrix}$$

tiene distribución normal. De este modo las variables $X(0)$ e $Y = X(0) - 2X(1)$ son independientes si y sólo si su covarianza es igual a cero. Para ver si es así, calcularemos

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X(0), X(0) - 2X(1)] &= \mathbb{E}[X(0)(X(0) - 2X(1))] - \mathbb{E}[X(0)]\mathbb{E}[X(0) - 2X(1)] \\ &= \mathbb{E}[X(0)^2 - 2X(0)X(1)] = \mathbb{E}[X(0)^2] - 2\mathbb{E}[X(0)X(1)] \\ &= R_X(0) - 2R_X(1) = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Por tanto las variables aleatorias $X(0)$ e Y son independientes.



Ejercicio

TEL.TEC.FEB.2003.P1

Si X e Y son Variables Aleatorias independientes, con distribución Normal de media cero y varianza uno, se define el proceso Gaussiano

$$Z(t) = X\cos(2\pi t) + Y\sin(2\pi t).$$

- a) Determinar la función conjunta de probabilidad de las Variables Aleatorias $Z(t_1)$ y $Z(t_2)$ obtenidas por observar $Z(t)$ en los instantes t_1 y t_2 .
- b) Calcular la función media y de autocorrelación del proceso $Z(t)$.
- c) Estudiar la estacionariedad de $Z(t)$ en sentido estricto y en sentido débil.



SOLUCIÓN:

1/2

- a) *Determinar la función conjunta de probabilidad de las V.A. $Z(t_1)$ y $Z(t_2)$ obtenidas por observar $Z(t)$ en los instantes t_1 y t_2 .*

Tenemos que

$$\begin{aligned} Z &= \begin{pmatrix} Z(t_1) \\ Z(t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \cos(2\pi t_1) + Y \sin(2\pi t_1) \\ X \cos(2\pi t_2) + Y \sin(2\pi t_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\pi t_1) & \sin(2\pi t_1) \\ \cos(2\pi t_2) & \sin(2\pi t_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lógicamente Z va a ser una normal Multivariante por el vector $(X, Y) \sim N(0_2, I_2)$, al ser independientes entre sí. Entonces

$$Z \sim N(0_2, A I_2 A') = N(0_2, A A') = N\left(0_2, \begin{pmatrix} 1 & \sigma(t_1, t_2) \\ \sigma(t_1, t_2) & 1 \end{pmatrix}\right)$$

donde $\sigma(t_1, t_2) = \cos(2\pi t_1) \cos(2\pi t_2) + \sin(2\pi t_1) \sin(2\pi t_2) = \cos(2\pi(t_1 - t_2))$. Por supuesto si $t_1 = t_2$, la covarianza es 1, y el coeficiente de correlación es también uno, porque las dos variables son iguales.



SOLUCIÓN:

2/2

- b) *Calcular la función de media y de autocorrelación del proceso $Z(t)$.*

Como es normal, es suficiente con fijarse en los dos primeros momentos. La esperanza es constante e igual a cero y las varianzas también son constantes e iguales a uno.

- c) *Estudiar la estacionariedad de $Z(t)$ en sentido estricto y en sentido débil.*

Como es normal ambos tipos de estacionariedad coinciden. La autocovarianza sólo depende de la distancia $t_1 - t_2$ entre las dos observaciones $Z(t_1)$ y $Z(t_2)$, por lo que es estacionario en sentido estricto.



Ejemplo

Considerar la oscilación aleatoria

$$X(t) = \cos(2\pi f t + B\Phi),$$

donde f es una constante real, Φ es una variable aleatoria uniforme en $[-\pi/2, \pi/2]$, y B es una variable aleatoria discreta, independiente de Φ , tal que $\Pr(B = 0) = p$ y $\Pr(B = 1) = q$.

Definir y calcular la esperanza de la variable aleatoria $X(t)$.



Ejemplo

Considerar la oscilación aleatoria

$$X(t) = \cos(2\pi f t + B\Phi),$$

donde f es una constante real, Φ es una variable aleatoria uniforme en $[-\pi/2, \pi/2]$, y B es una variable aleatoria discreta, independiente de Φ , tal que $\Pr(B = 0) = p$ y $\Pr(B = 1) = q$.

Definir y calcular la esperanza de la variable aleatoria $X(t)$.

SOLUCIÓN:

$$\mu_x(t) = \left(p + q\frac{2}{\pi}\right) \cos(2\pi f t)$$



Ejercicio

TEL.TEC.SEP.2005.C1

A partir de los procesos estocásticos $X(t)$ e $Y(t)$ incorrelados y de media cero, con funciones de autocorrelación $R_X(t_1, t_2)$ y $R_Y(t_1, t_2)$ respectivamente, se forma el proceso

$$Z(t) = X(t) + t Y(t).$$

- a) Calcular la función de autocorrelación de $Z(t)$.
- b) El proceso formado, ¿es estacionario en sentido débil?



SOLUCIÓN:

a) *Calcular la función de correlación de $Z(t)$*

La función de autocorrelación de $X(t)$ es $R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)]$ y análogamente para $Y(t)$. Además, por tratarse de procesos incorrelados,

$$C_{XY}(t_1, t_2) = 0$$

o, de forma equivalente,

$$\mathbb{E}[X(t_i)Y(t_j)] = \mu_X(t_i)\mu_Y(t_j) = 0.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} R_Z(t_1, t_2) &= \mathbb{E}[Z(t_1)Z(t_2)] = \mathbb{E}[(X(t_1) + Y(t_1)t_1)(X(t_2) + Y(t_2)t_2)] \\ &= R_X(t_1, t_2) + t_1 t_2 R_Y(t_1, t_2) \end{aligned}$$

b) *El proceso formado, ¿es estacionario en sentido débil?*

La media es independiente del tiempo porque es nula pero la correlación no depende solamente de la distancia entre dos tiempos considerados. Por tanto, el proceso **NO**