Tema 7: Procesos Estocásticos

Bernardo D'Auria

Departamento de Estadística

Universidad Carlos III de Madrid

Grupo 71 - I.T.T. Telemática

20 de Mayo 2008

Ejemplo

Sea A una variable aleatoria $\mathrm{N}(0,1)$, definimos el proceso $X(t)=A$. ¿Es ergódico en media?

Ejemplo

Sea A una variable aleatoria $\mathrm{N}(0, 1)$, definimos el proceso $X(t) = A$.
¿Es ergódico en media?

SOLUCIÓN:

El proceso $X(t)$ **NO** es ergódico en la media. De hecho

$$A = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)dt =$$

$$\mu_T \neq \mu_X$$

$$= \mathbb{E}[X(t)] = 0$$

Ejemplo

Se considera el proceso

$$X(t) = A\ \cos(\omega\, t) + B\ \sin(\omega\, t),$$

donde A y B son dos variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas en $[-1, 1]$.
Estudiar la ergodicidad en media y autocorrelación.

Ejemplo

ERGODICIDAD EN LA AUTOCORRELACIÓN

Se considera el proceso

$$X(t) = A\,\cos(\omega\,t) + B\,\sin(\omega\,t),$$

donde A y B son dos variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas en $[-1, 1]$.
Estudiar la ergodicidad en media y autocorrelación.

SOLUCIÓN:

El proceso $X(t)$ es ergódico en la media, siendo $\mu_T = \mu_X = 0$
El proceso $X(t)$ **NO** es ergódico en la autocorrelación siendo

$$R_X(\tau) = \frac{1}{3}\cos(\omega\,t)$$

$$R_T(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)X(t+\tau)dt = \frac{A^2+B^2}{2}\cos(\omega\,t)$$

y entonces $R_X(\tau) \neq R_T(\tau)$

Ejercicio

El tiempo en minutos que un ordenador tarda en ejecutar una tarea es una v.a. $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.
Para hacer un estudio de la evolución temporal del sistema se construye el proceso estocástico $X(t)$ definido como el tiempo que resta para completar la tarea sabiendo que ya ha consumido t minutos.

a) Determina $\mathbb{E}[X(t)]$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X(t)]$, $\mathbb{E}[X(t)^2]$.

b) Indica si cada una de las funciones del apartado anterior depende del tiempo e interpreta el resultado.

Ejercicio

El tiempo en minutos que un ordenador tarda en ejecutar una tarea es una v.a. $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.
Para hacer un estudio de la evolución temporal del sistema se construye el proceso estocástico $X(t)$ definido como el tiempo que resta para completar la tarea sabiendo que ya ha consumido t minutos.

a) Determina $\mathbb{E}[X(t)]$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X(t)]$, $\mathbb{E}[X(t)^2]$.

b) Indica si cada una de las funciones del apartado anterior depende del tiempo e interpreta el resultado.

Solución:

El proceso $X(t)$ se define como $X(t) = \max\{0, Y - t\}$.

a) $\mu_X(t) = \int_0^\infty \max\{0, y-t\}\,\lambda e^{-\lambda y}\,dy = \int_t^\infty (y-t)\lambda e^{-\lambda y}\,dy = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}$;

$\mathbb{V}\mathrm{ar}[X(t)] = \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda t}\left(2 - e^{-\lambda t}\right)$;

$\mathbb{E}[X(t)^2] = \frac{2}{\lambda^2} e^{-\lambda t}$.

b) Todas las funciones del apartado anterior dependen de t. Es decir que el proceso $X(t)$ no es estacionario, tampoco en el sentido débil.