Tema 7: Procesos Estocásticos

Bernardo D'Auria

Departamento de Estadística

Universidad Carlos III de Madrid

GRUPO 71 - I.T.T. TELEMÁTICA

16 de Mayo 2008

Ejemplo

Se define el proceso

$$X(t) = A\cos(2\pi f\, t + \Phi),$$

donde A y Φ son variables aleatorias independientes, siendo Φ una variable aleatoria $\mathrm{U}[-\pi, \pi]$, y $A \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

a) Calcular la función de correlación del proceso

b) Estudiar la estacionariedad de $X(t)$ en sentido sentido débil.

Ejemplo

Se define el proceso

$$X(t) = A\ \cos(2\pi f\, t + \Phi),$$

donde A y Φ son variables aleatorias independientes, siendo Φ una variable aleatoria $\mathrm{U}[-\pi, \pi]$, y $A \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

a) Calcular la función de correlación del proceso

b) Estudiar la estacionariedad de $X(t)$ en sentido sentido débil.

SOLUCIÓN:

a) $R_X(t, t+\tau) = \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{12}\tau)$;

b) Como $R_X(t_1, t_2)$ es solo función de $t_2 - t_1$ y $\mu_X(t) = 0$ no depende de t, el proceso $X(t)$ es estacionario en el sentido débil.

Ejercicio

TEL.TEC.FEB.2003.P1

Si X e Y son Variables Aleatorias independientes, con distribución Normal de media cero y varianza uno, se define el proceso Gaussiano

$$Z(t) = Xcos(2\pi t) + Ysin(2\pi t).$$

a) Determinar la función conjunta de probabilidad de las Variables Aleatorias $Z(t_1)$ y $Z(t_2)$ obtenidas por observar $Z(t)$ en los instantes t_1 y t_2.

Solución:

a) *Determinar la función conjunta de probabilidad de las V.A. $Z(t_1)$ y $Z(t_2)$ obtenidas por observar $Z(t)$ en los instantes t_1 y t_2.*

Tenemos que

$$\begin{aligned} Z &= \begin{pmatrix} Z(t_1) \\ Z(t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X\cos(2\pi t_1) + Y\sin(2\pi t_1) \\ X\cos(2\pi t_2) + Y\sin(2\pi t_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\pi t_1) & \sin(2\pi t_1) \\ \cos(2\pi t_2) & \sin(2\pi t_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Z va a ser una Normal bivariante al ser una trasformación linear de vector Normal bivariante $(X, Y) \sim \mathrm{N}(0_2, I_2)$.

$$0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$Z \sim \mathrm{N}(0_2, AI_2A') = \mathrm{N}(0_2, AA') = \mathrm{N}\left(0_2, \begin{pmatrix} 1 & \sigma(t_1, t_2) \\ \sigma(t_1, t_2) & 1 \end{pmatrix}\right)$$

donde $\sigma(t_1, t_2) = \cos(2\pi t_1)\cos(2\pi t_2) + \sin(2\pi t_1)\sin(2\pi t_2) = \cos(2\pi(t_1 - t_2))$.
Por supuesto si $t_1 = t_2$, la covarianza es 1, y el coeficiente de correlación es también uno, porque las dos variables son iguales.