Tema 6: Vectores aleatorios

Bernardo D'Auria

Departamento de Estadística

Universidad Carlos III de Madrid

Grupo 71 - I.T.T. Telemática

09 de Mayo 2008

Ejercicio

M4

Un vector aleatorio (X, Y) está distribuido uniformemente en el cuadrado de vértices $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ y $(-1, -1)$, es decir, la función de densidad conjunta es:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -1 \leq x, y \leq 1; \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

Determinar la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) $X^2 + Y^2 < 1$;

b) $2X - Y > 0$;

c) $|X + Y| < 2$.

Ejercicio

M4

Un vector aleatorio (X, Y) está distribuido uniformemente en el cuadrado de vértices $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ y $(-1, -1)$, es decir, la función de densidad conjunta es:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -1 \leq x, y \leq 1; \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

Determinar la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) $X^2 + Y^2 < 1$;

b) $2X - Y > 0$;

c) $|X + Y| < 2$.

Solución:

a) $\Pr(X^2 + Y^2 < 1) = 1/4$;

b) $\Pr(2X - Y > 0) = 1/2$;

c) $\Pr(|X + Y| < 2) = 1$.

Ejercicio

M8

La variable aleatoria bivariante (X, Y) está definida en el rectángulo $OBCD$.

$$O = (0,0) \quad B = (1,0) \quad C = (1,2) \quad D = (0,2).$$

con función de densidad

$$f(x,y) = k\,y^2.$$

a) Determinar el valor de k;
b) Calcular las densidades marginales;
c) Calcular las densidades condicionadas $f(x|y), f(y|x)$;
d) ¿Son X e Y independientes?
e) Calcular $\Pr(Y - 2X < 0)$.

Ejercicio

M8

La variable aleatoria bivariante (X, Y) está definida en el rectángulo $OBCD$.

$$O = (0, 0) \quad B = (1, 0) \quad C = (1, 2) \quad D = (0, 2).$$

con función de densidad

$$f(x, y) = k\,y^2.$$

a) Determinar el valor de k;

b) Calcular las densidades marginales;

c) Calcular las densidades condicionadas $f(x|y), f(y|x)$;

d) ¿Son X e Y independientes?

e) Calcular $\Pr(Y - 2X < 0)$.

SOLUCIÓN:

a) $k = 3/8$;

b) $f_X(x) = 1 \quad 0 \leq x \leq 1$ y $f_Y(y) = \frac{3}{8}y^2 \quad 0 \leq y \leq 2$;

c) $f(x|y) = 1 \quad 0 \leq x \leq 1$ y $f(y|x) = \frac{3}{8}y^2 \quad 0 \leq y \leq 2$;

d) $f(x, y) = f_X(x)\,f_Y(y) \Rightarrow$ son independientes;

e) $\Pr(Y < 2X) = 1/4$.