Tema 6: Vectores aleatorios

Bernardo D'Auria

Departamento de Estadística

Universidad Carlos III de Madrid

GRUPO 71 - I.T.T. TELEMÁTICA

06 de Mayo 2008

Ejercicio

M10

Si sabe que una Laplace $\mathrm{Lap}(\lambda)$ verifica que es igual a la diferencia de dos exponenciales independientes de igual parámetro λ, dar el pseudocódigo para generar una $\mathrm{Lap}(\lambda = 3)$.

Ejercicio

M10

Si sabe que una Laplace $\mathrm{Lap}(\lambda)$ verifica que es igual a la diferencia de dos exponenciales independientes de igual parámetro λ, dar el pseudocódigo para generar una $\mathrm{Lap}(\lambda = 3)$.

SOLUCIÓN:

Hay que recordar que para generar una $\mathrm{Exp}(\lambda)$ hay que utilizar el método de la inversa que proporciona en este caso que si $U \sim U(0, 1)$ entonces

$$-\frac{1}{\lambda}\log(1 - U) \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

Por lo tanto el pseudocódigo para generar una $\mathrm{Lap}(\lambda = 3)$ es:

- Generar $u1$ (según una $U(0, 1)$).
- Generar $exp1$ (con la expresión $-\frac{1}{\lambda}\log(1 - u1)$)
- Generar $u2$ (según una $U(0, 1)$).
- Generar $exp2$ (con la expresión $-\frac{1}{\lambda}\log(1 - u2)$)
- Generar lap a través de la expresión $exp1 - exp2$.

SOLUCIÓN TEÓRICA: 1/2

Usando la transformaciones de vectores aleatorios con

$$X_1 \sim \text{Exp}(\lambda) \text{ y } X_2 \sim \text{Exp}(\lambda),\ X_1 \perp X_2 \text{ y}$$

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2) \text{ y } \mathbf{Y} = (Y_1, Y_2) = (X_1 - X_2, X_2)$$

se obtiene que

$$f_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2) = \lambda^2 e^{-\lambda(y_1+2y_2)}$$

en el recinto $y_2 > \max\{0, -y_1\}$. Calculando la densidad marginal $L = Y_1 \sim \text{Lap}(\lambda)$

$$f_L(l) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|l|} \quad l \in \mathbb{R},$$

y la función de distribución marginal es igual a

$$F_L(l) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda l}}{2}, & l < 0; \\ 1 - \frac{e^{-\lambda l}}{2}, & l \geq 0. \end{cases}$$

SOLUCIÓN TEÓRICA: 2/2

Para generar una $\mathrm{Lap}(\lambda)$ podemos generar una $U \sim U(0,1)$ y luego transformarla según la transformación

$$L = F_L^{-1}(U)$$

donde

$$F_L^{-1}(u) = \begin{cases} +\frac{1}{\lambda}\log(2u), & u < 1/2; \\ -\frac{1}{\lambda}\log(2-2u), & u \geq 1/2. \end{cases}$$

por lo tanto el código para generar un valor distribuido según L será

```
u=rand(1,1);
l=(u<.5)*log(2*u)/3-(u>=.5)*log(2-2*u)/3
```

COMPARAR LAS DOS SOLUCIONES:

CÓDIGO 1

```
u=rand(10000,2);
x=-log(1-u)/3*[1;-1];
hist(x)
```

CÓDIGO 2

```
w=rand(10000,1);
l=(w<.5).*(log(2*w)/3)-(w>=.5).*(log(2-2*w)/3);
hist(l)
```

Ejercicio

SEP2007 ING. TEL. (P1)

Sea X v.a. con función de densidad Laplace, $\mathrm{Lap}(\lambda)$, con $f(x)$ dada por

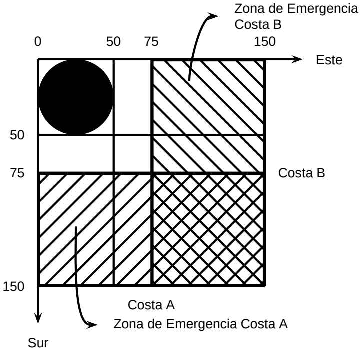
$$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}.$$

a) Determinar λ para que $f(x)$ sea efectivamente función de densidad.
b) Determinar $F(x)$ y comprobar que cumple las cuatro propiedades de una función de distribución ($F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$, monótona no decreciente y continua por la derecha).
c) Calcular $\Pr(X \geq 0)$.
d) Determinar la media, la mediana y la moda.
e) Si X_1,X_2 v.a.i.i.d.$\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ y se define $Y = X1 - X2$, ¿qué modelo teórico sigue la v.a. Y ? ¿Es la función idénticamente nula?
f) Basándose en apartados anteriores, dar en pseudocódigo MATLAB un algoritmo para generar $\mathrm{Lap}(\lambda = 3)$.

Ejercicio

TELECO.FEB.2004.P1

Una mancha de fuel debida a un vertido se encuentra en la situación mostrada en la figura. El avance diario de la mancha en dirección Este viene caracterizado por una $N(20\text{km}, 5\text{km})$, mientras que el avance diario en dirección Sur viene caracterizado por una $N(26\text{km}, 10\text{km})$.



a) ¿Cuál es la probabilidad de que al cabo de tres días la mancha haya alcanzado la costa A?

Si tomamos la v.a. bidimensional Normal formada por los avances en ambas direcciones y con coeficiente de correlación ρ,

b) Considerando $\rho = 0$, ¿cuál es la probabilidad de que en un día la mancha haya llegado la zona de emergencia de las dos costas?

c) Considerando $\rho = 0.25$, ¿cuál es la probabilidad de que en un día la mancha esté más cerca de la costa A que de la costa B?

SOLUCIÓN TEÓRICA: 1/2

a)

X	:	Avance en dirección Este en un día	$X \sim \mathrm{N}(20, 5)$
Y	:	Avance en dirección Sur en un día	$Y \sim \mathrm{N}(26, 10)$

$Y_1 + Y_2 + Y_3 \sim \mathrm{N}(3 \times 26, \sqrt{300}) = \mathrm{N}(78, 17.32)$

$$\begin{aligned}\Pr(Y_1 + Y_2 + Y_3 \geq 100) &= \Pr(Z \geq (100 - 78)/17.32) \\ &= 1 - \Pr(Z < 1.27) = 1 - 0.898 = 0.102.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\Pr(X \geq 25, Y \geq 25) &= \Pr(X \geq 25)\Pr(Y \geq 25) \\ &= \Pr(Z \geq (25 - 20)/5)\Pr(Z \geq (25 - 26)/10) \\ &= (1 - \Pr(Z < 1))(1 - \Pr(Z < -0.1)) \\ &= (1 - 0.8413)\Pr(Z < 0.1) = 0.1587 \times 0.5398 = 0.0856.\end{aligned}$$