Tema 5: Ejercicios de Introducción a la inferencia estadística

Bernardo D'Auria

Departamento de Estadística

Universidad Carlos III de Madrid

GRUPO 12 - I.T.I.G.

24 de Abril 2008

Ejercicio

En muestras aleatorias simples de tamaño $n = 3$ de una variable aleatoria normal de media μ y varianza conocida $\sigma^2 = 1$, se consideran los estimadores,

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3$$
$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{4}X_3$$
$$\hat{\mu}_3 = \frac{1}{8}X_1 + \frac{3}{8}X_2 + \frac{1}{2}X_3$$

Comprobar que son estimadores insesgados y comprobar su eficiencia.

Ejercicio

En muestras aleatorias simples de tamaño $n = 3$ de una variable aleatoria normal de media μ y varianza conocida $\sigma^2 = 1$, se consideran los estimadores,

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3$$
$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{4}X_3$$
$$\hat{\mu}_3 = \frac{1}{8}X_1 + \frac{3}{8}X_2 + \frac{1}{2}X_3$$

Comprobar que son estimadores insesgados y comprobar su eficiencia.

SOLUCIÓN:

	Sesgo	Eficiencia
μ_1	0	3
μ_2	0	$8/3$
μ_3	0	$32/13$

Ejercicio

M12

Sean $X_1, \ldots, X_n, X_n + 1, \ldots, X_{n+m}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con densidad *Normal* de media μ y varianza σ^2. Se desea estimar μ, pero los valores individuales de la variables se han extraviado y se dispone sólo de las medias

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{m} \sum_{i=n+1}^{n+m} x_i.$$

Para integrar las dos fuentes de información se utiliza un estimador de la forma

$$\hat{x} = \lambda \bar{x}_1 + (1 - \lambda)\bar{x}_2,$$

donde $0 \leq \lambda \leq 1$.
Probar que un estimador de este tipo es centrado para μ indicando además qué valor define el mejor de todos ellos.

Ejercicio

M12

Sean $X_1, \dots, X_n, X_n + 1, \dots, X_{n+m}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con densidad *Normal* de media μ y varianza σ^2. Se desea estimar μ, pero los valores individuales de la variables se han extraviado y se dispone sólo de las medias

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{m} \sum_{i=n+1}^{n+m} x_i.$$

Para integrar las dos fuentes de información se utiliza un estimador de la forma

$$\hat{x} = \lambda \bar{x}_1 + (1 - \lambda) \bar{x}_2,$$

donde $0 \le \lambda \le 1$.
Probar que un estimador de este tipo es centrado para μ indicando además qué valor define el mejor de todos ellos.

SOLUCIÓN:

$$\mathbb{E}[\hat{x}] = \mu;$$

$$\lambda = \frac{n}{n+m}.$$

Ejercicio I3

Se desea estimar la media μ de una variable aleatoria X. Para ello se toman 10 datos y se calcula su media muestral $\bar{X}$ y la varianza de dichos datos s_X^2.
Comentar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Por el teorema central del límite sabemos que μ será una variable aleatoria normal

b) Un estimador de X es $\bar{X}$

c) La media muestral con un conjunto de datos es un número y no una variable aleatoria

d) La media muestral $\bar{X}$ tiene siempre una distribución en el muestreo según una normal

e) Si X es normal, $\bar{X}$ es siempre normal

f) Para disminuir la varianza de $\bar{X}$ a la mitad habría que tomar al menos 100 datos

g) Como la media muestral es un estimador insesgado, tenemos asegurado que $\bar{X} = \mu$

Ejercicio

I3

Se desea estimar la media μ de una variable aleatoria X. Para ello se toman 10 datos y se calcula su media muestral $\bar{X}$ y la varianza de dichos datos s_X^2.
Comentar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Por el teorema central del límite sabemos que μ será una variable aleatoria normal
b) Un estimador de X es $\bar{X}$
c) La media muestral con un conjunto de datos es un número y no una variable aleatoria
d) La media muestral $\bar{X}$ tiene siempre una distribución en el muestreo según una normal
e) Si X es normal, $\bar{X}$ es siempre normal
f) Para disminuir la varianza de $\bar{X}$ a la mitad habría que tomar al menos 100 datos
g) Como la media muestral es un estimador insesgado, tenemos asegurado que $\bar{X} = \mu$

Solución:

c) Verdadera
e) Verdadera

Ejercicio

I5

El tiempo T (en segundos) que un ordenador tarda en ejecutar una tarea sigue una variable aleatoria continua de función de densidad

$$f(t) = \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}},$$

con $t \geq 1$ y $\alpha > 1$.

a) Utilizando el método de los momentos, propón un estimador para el parámetro α.

b) Se ejecuta 5 veces la tarea, y se cronometra el tiempo que ha tardado cada vez. Estos tiempos son (en segundos):

$$6, 5, 3, 7, 2.$$

Basándonos en esta muestra, y el estimador de α anterior, estima la probabilidad de que se tarde más de 5 segundos en realizar la tarea.

Ejercicio I5

El tiempo T (en segundos) que un ordenador tarda en ejecutar una tarea sigue una variable aleatoria continua de función de densidad

$$f(t) = \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}},$$

con $t \geq 1$ y $\alpha > 1$.

a) Utilizando el método de los momentos, propón un estimador para el parámetro α.

b) Se ejecuta 5 veces la tarea, y se cronometra el tiempo que ha tardado cada vez. Estos tiempos son (en segundos):

$$6, 5, 3, 7, 2.$$

Basándonos en esta muestra, y el estimador de α anterior, estima la probabilidad de que se tarde más de 5 segundos en realizar la tarea.

SOLUCIÓN:

a) $\hat{\alpha} = \bar{T}/(\bar{T} - 1)$;

b) $\Pr = 0.127$.