

Cálculo del p -valor

En lo que sigue ilustraremos el cálculo del p -valor en tres situaciones típicas. Supongamos que tenemos una muestra aleatoria simple (X_1, X_2, \dots, X_n) de una población normal (varianza desconocida) y queremos realizar uno de los siguientes contrastes:

A	B	C
$H_0 : \mu = \mu_0$	$H_0 : \mu \leq \mu_0$	$H_0 : \mu \geq \mu_0$
$H_1 : \mu \neq \mu_0$	$H_1 : \mu > \mu_0$	$H_1 : \mu < \mu_0$

Si bien las regiones de rechazo en estos contrastes son diferentes, el estadístico de contraste, t_c , es el mismo: $t_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ y sabemos que t_c bajo la hipótesis nula distribuye como una t_{n-1} .

El p -valor en cada uno de los contrastes anteriores se obtiene de:

A	B	C
$\Pr \{ t_{n-1} > t_c \}$	$\Pr \{t_{n-1} > t_c\}$	$\Pr \{t_{n-1} < t_c\}$

Ejemplo: Supongamos que tenemos la siguiente muestra $x_1 = 1,5, x_2 = 2,0, x_3 = 2,5$ y quere-

mos calcular el p -valor en el contraste: $\begin{cases} H_0 : \mu = 1,75 \\ H_1 : \mu \neq 1,75 \end{cases}$

Tenemos que $\bar{x} = 2,0, s = 0,5$, de manera que el estadístico de contraste es $t_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{2,0 - 1,75}{\frac{0,5}{\sqrt{3}}} \approx 0,8660$, entonces:

$$p - \text{valor} = \Pr \{|t_2| > 0,8660\}$$

Para calcular la probabilidad anterior, es conveniente dividirla en las siguientes probabilidades: $\Pr \{t_2 > 0,8660\} + \Pr \{t_2 < -0,8660\}$. Notemos que por la simetría de la distribución t de Student ambas probabilidades son iguales, es decir:

$$p - \text{valor} = 2 \Pr \{t_2 > 0,8660\} = 2(1 - \Pr \{t_2 < 0,8660\}).$$

En la tabla de la t -student, en la fila que corresponde a 2 grados de libertad veremos que podemos acotar 0,8660 por 0,816 y 1,061. A 0,816 le corresponde una probabilidad igual a 0,75 y a 1,061 le corresponde 0,8. Por tanto $0,75 < \Pr \{t_2 < 0,8660\} < 0,8$ y finalmente, $0,4 = 2 * (1 - 0,8) < p - \text{valor} < 2 * (1 - 0,75) = 0,5$.

Podemos realizar el cálculo exacto del p -valor, utilizando el programa Statgraphics:

```
Hypothesis Tests for X
-----
t-test
-----
Null hypothesis: mean = 1.75
Alternative: not equal

Computed t statistic = 0.866025
P-Value = 0.477767
```

Do not reject the null hypothesis for alpha = 0.05.

Para el contraste: $\begin{cases} H_0 : \mu \geq 1,75 \\ H_1 : \mu < 1,75 \end{cases}$, obtenemos:

```
Hypothesis Tests for X
-----
t-test
-----
Null hypothesis: mean = 1.75
Alternative: less than

Computed t statistic = 0.866025
P-Value = 0.761116
```

Do not reject the null hypothesis for alpha = 0.05.

Para el contraste: $\begin{cases} H_0 : \mu \leq 1,75 \\ H_1 : \mu > 1,75 \end{cases}$, obtenemos:

```
Hypothesis Tests for X
-----
t-test
-----
Null hypothesis: mean = 1.75
Alternative: greater than

Computed t statistic = 0.866025
P-Value = 0.238884
```

Do not reject the null hypothesis for alpha = 0.05.