

Ejemplo:

Se lleva a cabo un estudio psicológico sobre cambios de personalidad en los niños varones al llegar a la adolescencia. Se consideran las variables siguientes (ambas medidas en años):

X="edad en la que se manifiestan los primeros cambios físicos de desarrollo"

Y="edad en la que se detectan los primeros cambios de personalidad asociados con la adolescencia"

X	11	8	12	11	10	7	9	12	11	12
Y	11	9	12	12	10	8	10	13	11	12

- Encontrar el intervalo de confianza al 95% para la media condicionada cuando $X=9.5$. Interpretar el significado de este intervalo.
- Encontrar el intervalo de predicción o pronóstico al 95% para Y cuando $X=9.5$. Interpretar el significado de este intervalo.
- Dibujar las bandas de confianza para las medias condicionadas y para las predicciones.

	x	y	x^2	y^2	xy
	11	11	121	121	121
	8	9	64	81	72
	12	12	144	144	144
	11	12	121	144	132
	10	10	100	100	100
	7	8	49	64	56
	9	10	81	100	90
	12	13	144	169	156
	11	11	121	121	121
	12	12	144	144	144
total	103	108	1089	1188	1136

	x	y	x^2	y^2
medias (n=10)	10.3	10.8	108.9	118.8

	x	y
varianzas	2.81	2.16

	xy
covarianza	2.36

estimación de los parámetros	
$\hat{\beta}_0$	2.1494662
$\hat{\beta}_1$	0.8398577
$s_R^2 = \hat{\sigma}^2$	0.2224199

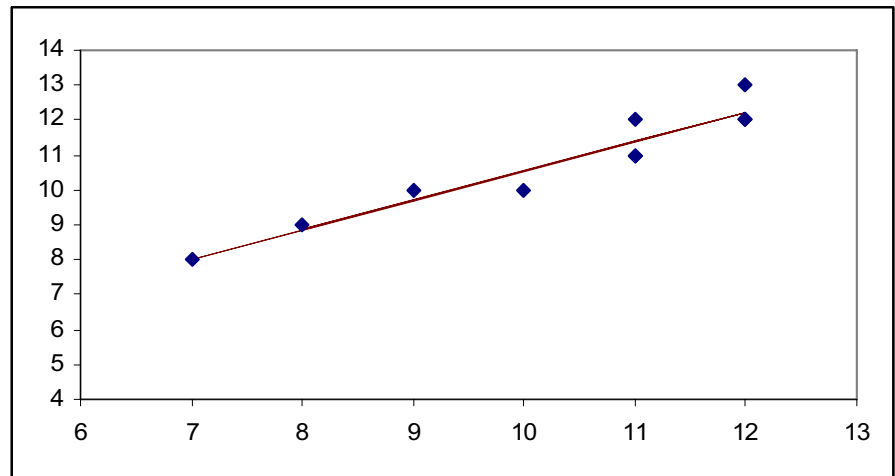
Estimación parámetros

$$\hat{\beta}_0 = 2.1494662$$

$$\hat{\beta}_1 = 0.8398577$$

$$s_R^2 = \hat{\sigma}^2 = 0.2224199$$

x	y	$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$
11	11	11.3879004
8	9	8.8683274
12	12	12.227758
11	12	11.3879004
10	10	10.5480427
7	8	8.02846975
9	10	9.70818505
12	13	12.227758
11	11	11.3879004
12	12	12.227758



a) Intervalo de confianza para la media condicionada:

$$\text{I.C.}(m_h)_{1-\alpha} = \left[\hat{y}_h \pm t_{1-\alpha/2} \frac{s_R}{\sqrt{\hat{n}_h}} \right]$$

$$\hat{n}_h = \frac{n}{1 + \frac{(x_h - \bar{x})^2}{s_x^2}} = \frac{10}{1 + \frac{(9.5 - 10.3)^2}{2.81}} = 8.144928$$

$$\hat{y}_h = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_h = 2.149463 + 0.839858 \cdot 9.5 = 10.128114$$

$$t_{0.975} = 2.31$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$\text{I.C.}(m_h)_{1-\alpha} = \left[10.128114 \pm 2.31 \sqrt{\frac{0.222418}{8.144928}} \right] = [9.746384, 10.509841]$$

Si la edad en la que se manifiestan los primeros cambios físicos de desarrollo es de 9.5 años, la edad media en la que se detectan los primeros cambios de personalidad asociados a la adolescencia está comprendida entre 9.7 y 10.5 años.

b) Pronóstico para y_h cuando $x_h=9.5$:

$$\left[\hat{y}_h \pm t_{1-\alpha/2} s_R \sqrt{1 + \frac{1}{\hat{n}_h}} \right]$$

$$\left[10.128114 \pm 2.31 \sqrt{0.222418 \left(1 + \frac{1}{8.144928} \right)} \right] = [8.973748, 11.282480]$$

Para un niño que ha manifestado los primeros cambios físicos de desarrollo a la edad de 9.5 años, se prevé que se le detecten los primeros cambios de personalidad asociados a la adolescencia entre los 8.97 y los 11.3 años.

c) Construcción de las bandas de confianza al 95% ($n=10$, $t_{0.975}=2.31$)

x_h	$\hat{y}_h$	$\hat{n}_h$	para la media condicionada	
7	8.0285	2.0511	7.2678	8.7892
8	8.8683	3.4691	8.2834	9.4532
9	9.7082	6.2444	9.2722	10.1442
10	10.5480	9.6897	10.1981	10.8980
11	11.3879	8.5152	11.0146	11.7612
12	12.2278	4.9298	11.7371	12.7184

x_h	$\hat{y}_h$	$\hat{n}_h$	para la respuesta futura	
7	8.0285	2.0511	6.6997	9.3572
8	8.8683	3.4691	7.6318	10.1048
9	9.7082	6.2444	8.5348	10.8816
10	10.5480	9.6897	9.4038	11.6923
11	11.3879	8.5152	10.2363	12.5395
12	12.2278	4.9298	11.0329	13.4226

Representación de las bandas de confianza al 95% para la **media condicionada** y para las **predicciones futuras**.

