

**Ejercicios tema 1: El modelo de regresión simple.**

1. En una empresa se considera que el salario que percibe un trabajador es función lineal de sus años de experiencia. Es decir:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$$

donde  $y_i$  es el salario mensual del individuo  $i$ -ésimo,  
 $x_i$  son los años de experiencia de individuo  $i$ -ésimo,  
 $u_i$  es el término de error, que supondremos que verifica las hipótesis habituales del modelo de regresión.

Teniendo en cuenta los siguientes resultados:

$$\bar{x} = 5, \bar{y} = 3, n = 20,$$

$$\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = 160, \sum_{i=1}^{20} (y_i - \bar{y})^2 = 83.2, \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 80,$$

Obtener los estimadores insesgados de los parámetros  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ , y  $\sigma^2$ . Interpretar los resultados.

2. Se considera el modelo de regresión  $y_i = \beta x_i + u_i$  donde el término de error se supone que verifica las hipótesis habituales del modelo de regresión y que las  $x$  son números fijos (es decir, no son aleatorias).

- Obtener un estimador de  $\beta$  como solución al problema de minimización de la suma de los cuadrados de los residuos.
- Demostrar que  $\beta$  tiene ley normal.
- Hallar la esperanza y varianza de  $\beta$ .
- Dibujar la recta de regresión.

3. Se considera el modelo de regresión simple  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$ , donde el término de error se supone que verifica las hipótesis habituales del modelo de regresión. Se pide:

- Si la correlación entre  $x$  e  $y$  es cero, ¿cómo es la recta de regresión?
- ¿Cuál es la suma de los cuadrados de los residuos y el coeficiente de determinación cuando todas las observaciones se encuentran sobre la recta de regresión?
- Dibuja la recta de regresión en los dos casos anteriores.
- Demostrar que el siguiente estadístico

$$b_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

es un estimador insesgado del parámetro  $\beta_1$ .

4. La siguiente tabla contiene una muestra de 8 familias para las cuales se observan tres variables:

Consumo ( $y$ )	Renta ( $x$ )	Tamaño ( $t$ )
2.6	3	1
3.2	4	1
4.4	5	2
4.8	6	2
4.2	4.5	3
4.8	6	3
4.8	5	4
5.6	7	4

Se considera el modelo de regresión simple  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$ , donde el término de error se supone que verifica las hipótesis habituales del modelo de regresión. Se pide:

- Obtener los estimadores insesgados de los parámetros  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ , y  $\sigma^2$ . Interpretar los resultados.
- Obtener los residuos y representarlos gráficamente frente a los valores esperados y frente al tamaño de la familia. Interpretar los resultados.
- Construir las variables *renta per cápita* y *consumo per cápita*, dividiendo respectivamente las variables renta y consumo por el tamaño de la familia. Repetir los apartados (a) y (b).

5. Se considera el modelo de regresión simple  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$ , donde el término de error se supone que verifica las hipótesis habituales del modelo de regresión. Teniendo en cuenta los siguientes resultados:

$$n = 24, \quad \sum_{i=1}^{24} x_i = 54.385, \quad \sum_{i=1}^{24} y_i = 509.062,$$

$$\sum_{i=1}^{24} x_i^2 = 157.078, \quad \sum_{i=1}^{24} y_i^2 = 12772.232, \quad \hat{\beta}_1 = 6.861,$$

- Obtener el estimador insesgado del término independiente.
- Obtener una estimación de la varianza residual.