

8 Ejemplos y ejercicios del tema 8.

8.1 Ejemplos.

Ejemplo 49 Supongamos que el tiempo que tarda en dar respuesta a un enfermo el personal sanitario de un hospital es uniforme entre 0 y 8 minutos.

1. Determinad la función de densidad y la función de distribución y dibujadlas.
2. Calculad la probabilidad que una respuesta exceda los 7 minutos. Dibujad el área que representa esta probabilidad en la función de densidad. ¿Cómo representaríais esta probabilidad en la función de distribución?
3. ¿Cuál creéis que es el tiempo medio de respuesta?

Ejemplo 50 La caducidad (en días) de un yogur es una variable aleatoria que tiene como función de distribución $F(x) = 1 - \exp(-x/21)$, si $x \geq 0$, y vale 0 si $x < 0$.

1. ¿Cuál es la función de densidad de X ?
2. ¿Cuál es la probabilidad que un yogur dure más de un mes?
3. ¿Cuál es la duración media de los yogures?

Ejemplo 51 Tiramos una moneda equilibrada 1000 veces. Calculad la probabilidad que el número de caras esté entre 490 y 510.

Ejemplo 52 El 5% de los termostatos fabricados por una empresa no satisfacen las especificaciones técnicas. Se extrae un lote de 2000 termostatos.

- a) Utilizando la aproximación a la ley normal, calculad la probabilidad que el lote contenga más de 120 termostatos defectuosos.
- b) Se extrae del lote una muestra de 200 termostatos. Si el número de termostatos defectuosos en la muestra es inferior a 12, se acepta el lote, y se rechaza en caso contrario. ¿Cuál es la probabilidad que se acepte el lote?

Ejemplo 53 En un proceso de fabricación de película fotográfica aparece por término medio un defecto cada 20 metros de película. Si la distribución de los defectos es de Poisson, calculad la probabilidad que haya menos de 6 defectos en un rollo de 200 metros de película.

Ejemplo 54 Considerad la v.a. X que tiene ley uniforme discreta dada por la siguiente función de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} 1/4, & x = 1, 2, 3, 4, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sean $X_1, \dots, X_n$ son v.a. i.i.d. con la misma distribución que X , y considerad la v.a.

$$Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Calculad la probabilidad $P(2.4 < Y < 2.8)$ para $n = 36$.

8.2 Ejercicios.

Ejercicio 30 Sea $Z \sim N(0, 1)$. Utilizando las tablas calculad:

1. $P(Z \leq 2)$, $P(Z \leq -2)$,
2. $P(Z \leq 1.03)$, $P(Z \leq -1.03)$,
3. $P(Z \leq -0.748)$, $P(Z \leq 0.748)$,
4. $P(Z \leq 4)$, $P(Z \leq -4)$.

Ejercicio 31 Sea $Z \sim N(0, 1)$. Utilizando las tablas calculad:

1. $P(Z \geq 2.1)$, $P(Z \geq -2.22)$,
2. $P(Z \geq 1.13)$, $P(Z \geq -1.335)$,
3. $P(Z \geq 1.96)$, $P(Z \geq -2.33)$,
4. $P(Z \geq 2.576)$, $P(Z \geq -1.642)$.

Ejercicio 32 Sea $Z \sim N(0, 1)$. Utilizando las tablas calculad:

1. $P(1 \leq Z \leq 2)$,
2. $P(0.5 \leq Z \leq 1.5)$,
3. $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96)$,
4. $P(-2.58 \leq Z \leq 2.58)$.

Ejercicio 33 Suponed que la altura de las mujeres de una cierta población es una variable aleatoria con distribución normal de media 163 cm y varianza 49. Calculad:

1. La probabilidad que una mujer escogida al azar mida menos de 172 cm.
2. La probabilidad que una mujer escogida al azar mida menos de 160 cm.
3. La probabilidad que una mujer escogida al azar mida más de 155 cm.
4. La probabilidad que una mujer escogida al azar mida más de 175 cm.
5. La probabilidad que una mujer escogida al azar mida entre 158 cm y 166 cm.

Ejercicio 34 Suponiendo que $Z \sim N(0, 1)$, calculad utilizando las tablas:

1. El percentil 25 (o primer cuartil) es ...
2. El percentil 50 (o mediana) es ...
3. El percentil 75 (o tercer cuartil) es ...
4. El percentil 95 es ...
5. El percentil 99 es ...
6. ¿Entre qué dos valores de Z simétricos respecto del 0 se encuentran el 95% de las observaciones?
7. ¿Entre qué dos valores de Z simétricos respecto del 0 se encuentran el 90% de las observaciones?
8. ¿Entre qué dos valores de Z simétricos respecto del 0 se encuentran el 99% de las observaciones?

Ejercicio 35 Considerad la variable altura de las mujeres $X \sim N(163, 49)$ y calculad:

1. El percentil 25 (o primer cuartil) es $x_{0.25} = z_{0.25} \times 7 + 163 = 158.31$. ¿Qué significa esto?

2. El percentil 50 (o mediana) es ...
3. El percentil 75 (o tercer cuartil) es ...
4. El percentil 95 es ...
5. El percentil 99 es ...
6. ¿Entre qué dos valores de X simétricos respecto de $\mu = 163$ se encuentran el 95% de las observaciones? Esto significa qué dos percentiles dejan en la parte central de la distribución un área de 0.95 y en las colas un área de 0.025.
7. ¿Entre qué dos valores de X simétricos respecto de $\mu = 163$ se encuentran el 90% de las observaciones?
8. Entre qué dos valores de X simétricos respecto de $\mu = 163$ se encuentran el 99% de las observaciones?

Ejercicio 36 En el ejercicio 51 encontrad aquél valor a tal que $P(500 - a < X < 500 + a) = 0.95$.

Ejercicio 37 Una empresa produce paquetes de arroz. El peso de los paquetes se distribuye según una normal de media 1 kg y desviación 50 g. La empresa tiene un mecanismo de control que retira automáticamente todos los paquetes que pesan menos de 0.9 kg y los que pesan más de 1.1 kg. El resto de la producción se pone a la venta.

- a) ¿Qué porcentaje de los paquetes producidos se retiran por el mecanismo de control?
- b) Si un paquete pasa el control, ¿Cuál es la probabilidad que tenga un peso superior a 1.05 kg?

Ejercicio 38 Se estima que el peso en el momento del nacimiento de los bebés de un cierto país sigue una distribución normal de media 2.6 kg y desviación 0.5 kg.

- a) Si los bebés de menos de 1.7 kg necesitan pasar por un periodo de incubación artificial, ¿cuál es el porcentaje de bebés que necesitan pasar por este periodo?
- b) ¿Qué porcentaje de bebés pesa más de 3.5 kg?
- c) ¿A partir de qué peso se encuentra el 10% de los bebés que más pesan?
- d) ¿Cuál es el intervalo centrado en la media que contiene el peso del 90% de los bebés?

Ejercicio 39 La fiabilidad de cierto tipo de fusible eléctrico es la probabilidad que un fusible, escogido al azar entre los fusibles recién producidos, funcione correctamente bajo las condiciones para las cuales fue diseñado. En una comprobación rutinaria, se probaron 1000 fusibles y se encontró que 27 eran defectuosos. Suponiendo que la fiabilidad del fusible es de 0.98, ¿Cuál es la probabilidad de observar 27 o más fusibles defectuosos?