

7 Ejemplos y ejercicios del tema 7.

7.1 Ejemplos.

Ejemplo 41 Si X tiene ley uniforme discreta con $f(x) = 1/n$, para $x = 1, 2, \dots, n$, demostrad que:

- $E(X) = \frac{n+1}{2}$,
- $\text{var}(X) = \frac{n^2-1}{12}$,
- como aplicación, hallad la esperanza y varianza de la puntuación obtenida al lanzar un dado no trucado.

Ejemplo 42 Lanzamos una sola vez una moneda trucada de manera que la probabilidad de obtener una cara es $2/3$. Modelar este experimento mediante una variable aleatoria.

Ejemplo 43 Lanzamos 10 veces la moneda del ejemplo 42.

- Modelar este experimento mediante una variable aleatoria.
- Calcular la probabilidad de obtener 6 caras.
- Calcular la probabilidad de obtener menos de 3 caras.

Ejemplo 44 El 25% de los árboles de un cierto tipo tienen una enfermedad en las hojas. Escogemos 5 árboles al azar. ¿Cuál es la probabilidad que todos tengan la enfermedad? ¿Cuál es la probabilidad que menos de 2 la padezcan? ¿Y la que 2 o más la padezcan?

Ejemplo 45 ¿Cuál es la probabilidad que se tenga que lanzar la moneda del ejemplo 42 dos veces para obtener una cara? ¿Y la probabilidad que se tenga que lanzar 5 veces para obtener una cara?

Ejemplo 46 Una centralita telefónica recibe unas 300 llamadas cada hora y no puede establecer más de 12 conexiones por minuto. Queremos calcular:

- la probabilidad que quede colapsada en un minuto dado,
- la probabilidad que haya una sola llamada en un minuto dado.

Ejemplo 47 En el estudio de cierto organismo acuático se toman un gran número de muestras (del mismo volumen) de un lago y se cuenta el número de organismos en cada muestra. Se ve que en media el número de organismos es 2.

- Queremos calcular la probabilidad que en la próxima muestra que tomemos haya como máximo un organismo.
- ¿Cuál sería la probabilidad que en la próxima muestra hubiera más de 5 organismos?

Ejemplo 48 Sabemos que la probabilidad de capturar una cierta especie de peces es igual a 0.01 y queremos calcular la probabilidad que entre 300 peces capturados concretamente 3 sean de esa especie.

7.2 Ejercicios.

Ejercicio 27 Para comprender mejor el modelo binomial, podéis analizar las siguientes cuestiones:

1. Se sabe que cierta semilla germina con probabilidad 0.9. Se hacen 20 parcelas y se planta una semilla en cada parcela. ¿Cuál es la probabilidad que germinen menos de 15 semillas? ¿Cuál es el número esperado de germinaciones?
2. Una de cada 10^9 bacterias de *Escherichia coli* es mutante y se hace resistente al antibiótico. Se tiene un cultivo con 2×10^9 bacterias. ¿Cuál es la probabilidad que ninguna de ellas acabe mutando? ¿Cuál es el número esperado de mutaciones?

Ejercicio 28 Para comprender mejor el modelo de Poisson, podéis analizar las siguientes cuestiones:

1. Anotamos el número de veces que una planta de energía nuclear emite gases radioactivos en un cierto periodo de tiempo y vemos que la media de radiaciones es proporcional al periodo, siendo 2 el número medio de emisiones en un mes.
 - (a) ¿Cuál es la distribución de X =número de radiaciones emitidas en periodos de un mes?
 - (b) ¿Cuál es la distribución de X_3 =número de radiaciones emitidas en periodos de tres meses?
 - (c) ¿Cuál es la distribución de $X_{1/2}$ =número de radiaciones emitidas en periodos de 15 días?
 - (d) Calculad las probabilidades $P(X \leq 2)$, $P(X_3 \geq 5)$, $P(X_{1/2} = 0)$, y decid qué significan.
2. El número de glóbulos blancos por mm^3 de sangre en un individuo sano es en media de unos 6000. Con el fin de detectar si hay una deficiencia de glóbulos blancos se toma una gota de sangre de 0.001 mm^3 y se anota el número de glóbulos blancos, que llamaremos X .
 - (a) ¿Cuál es el valor esperado de X ? ¿Cuál es su distribución?
 - (b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya menos de 2 glóbulos blancos? ¿Podemos considerar que en este caso hay deficiencia?

Ejercicio 29 Si en un proceso de fabricación se produce un 2% de chips defectuosos, calculad la probabilidad que el número de chips defectuosos en un lote de 100 chips escogidos al azar:

- a) sea menor que 4,
- b) sea mayor que 2.