Tema 4: Variables aleatorias multidimensionales

En este tema:

- Distribución conjunta de probabilidad
- Probabilidad/densidad marginal
- Probabilidad/densidad condicionada
- Esperanza, varianza, desviación típica de la variable aleatoria
- Independencia
- Covarianza, correlación
- Esperanza de $g(X, Y)$, esperanza y varianza de suma/diferencia

Distribución conjunta de probabilidad

Sean X e Y variables aleatorias discretas. Su función de masa conjunta, es la función $p(x, y)$ que expresa la probabilidad simultánea de que X tome el valor x e Y tome el valor y:

$$p(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

Propiedades

- $0 \leq p(x, y) \leq 1$ para todos los valores x de X e y de Y.
- $\sum_x \sum_y p(x, y) = 1$.

Ejemplo

X = número de tarjetas de crédito
Y = número de compras por semana

La función de masa conjunta (o de probabilidad conjunta) es

$x \setminus y$	0	1	2	3
1	0,08	0,07	0,04	0,01
2	0,10	0,35	0,26	0,09

Distribución conjunta de probabilidad

Sean X e Y variables aleatorias continuas. Su función de densidad conjunta, $f(x, y)$, es una función con las propiedades:

- $f(x, y) \geq 0$ para todos los valores x de X e y de Y.
- el volumen debajo de la función de densidad cuando se abarcan todos los valores de X e Y es 1 ($\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dxdy = 1$).

Nota Al igual que la integral definida de una función de una variable en $\mathbb{R}$ representa el área bajo la función, la integral doble de una función de dos variables en $\mathbb{R}^2$ representa el volumen bajo la función.
Una integral doble se calcula como la iteración de dos integrales, primero integrado respecto a una variable y después respecto a la otra.

Distribución conjunta de probabilidad

Ejemplo Sean X e Y dos v.a. continuas con función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dxdy &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx \right) dy && \text{la int. de dentro es con respcto a } x \text{ y la de fuera con respecto a } y \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y)dx \right) dy && \text{ya que } f(x,y) \text{ es 0 si } x \text{ está fuera de } [0,1] \text{ o } y \text{ está fuera de } [0,1] \\
&= \int_0^1 \left(\left[\frac{x^2}{2} + yx \right]_0^1 \right) dy && \text{al integrar respecto a } x,\ y \text{ actúa como una constante} \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y \right) dy && \text{integramos normalmente con respecto a } y \\
&= \left[\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = 1
\end{aligned}$$

Probabilidad marginal de variables discretas

La función de probabilidad marginal de la variable discreta X, es la función de probabilidad que se obtiene sumando las probabilidades conjuntas correspondientes a todos los valores posibles de la variable Y:

$$p_X(x) = \sum_y p(x, y)$$

Al igual con la variable Y:

$$p_Y(y) = \sum_x p(x, y)$$

Ejemplo

X = número de tarjetas de crédito

Y = número de compras por semana

Las marginales son

x	1	2	
$p_X(x)$	0,2	0,8	1

y	0	1	2	3	
$p_Y(y)$	0,18	0,42	0,30	0,10	1

Densidad marginal de variables continuas

La función de densidad marginal de la variable continua X es

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy$$

Al igual con la variable Y

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx$$

Ejemplo $f(x,y) = x + y$, donde $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$

$$f_X(x) = \int_0^1 (x+y)dy = \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = x + \frac{1}{2}, \; 0 \leq x \leq 1$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 (x+y)dx = \left[\frac{x^2}{2} + yx\right]_0^1 = \frac{1}{2} + y, \; 0 \leq y \leq 1$$

Al integrar con respecto a una de las dos variables, la otra actúa como una constante.

Esperanza y varianza de una variable aleatoria

Sea X una variable aleatoria discreta:

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \mu_x = \sum_x x \cdot p_X(x) \\
V[X] &= \sigma_x^2 = \sum_x (x - E[X])^2 \cdot p_X(x) = \left(\sum_x x^2 \cdot p_X(x) \right) - E[X]^2 \\
DT[X] &= \sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}
\end{aligned}
$$

Ejemplo (continuación del ejemplo con v.a. discretas)

$$
\begin{aligned}
E[X] &= 1(0,2) + 2(0,8) = 1,8 \\
V[X] &= (1^2(0,2) + 2^2(0,8)) - (1,8)^2 = 0,16 \\
DT[X] &= \sqrt{0,16} = 0,4
\end{aligned}
$$

Esperanza y varianza de una variable aleatoria

Sea X una variable aleatoria continua:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx \\ V[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 \cdot f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)dx - (E[X])^2 \end{aligned}$$

Ejemplo (continuación del ejemplo con v.a. continuas)

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^1 x\overbrace{(x + \frac{1}{2})}^{f_X(x)}dx = 7/12. \\ V[X] &= \int_0^1 x^2\overbrace{(x + \frac{1}{2})}^{f_X(x)}dx - (7/12)^2 = 11/144. \end{aligned}$$

Propiedades de la esperanza y varianza

Esperanza (a, b, c constantes):

- $E[c] = c$
- $E[cX] = cE[X]$
- $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$

Varianza:

- $V[c] = 0$
- $V[cX] = c^2 V[X]$
- $V[a + bX] = b^2 V[X]$

Probabilidad condicionada de variables discretas

La función de probabilidad condicionada de la variable aleatoria Y discreta, dado que la variable aleatoria discreta X toma el valor x, expresa la probabilidad de que Y tome el valor y conociendo el valor que ha tomado X:

$$p(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)} \quad \left(p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)} \right)$$

Ejemplo

Calcularemos la distribución del número de tarjetas de crédito entre los individuos que realizan 2 compras a la semana $p(x|Y=2)$

X	1	2	
$p(x\|Y=2)$	0,13 $\left(= \frac{0,04}{0,30}\right)$	0,87 $\left(= \frac{0,26}{0,30}\right)$	1

Probabilidad condicionada de variables continuas

La función de densidad condicionada de la variable aleatoria Y continua, dado que la variable aleatoria continua X toma el valor x, expresa la densidad de Y conociendo el valor que ha tomado X:

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \quad \left(f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \right)$$

Ejemplo (continuación del ejemplo con v.a. continuas)

$$f(x|Y=0,2) = \frac{f(x;0,2)}{f_Y(0,2)} = \frac{x+0,2}{0,7},\ 0 \leq x \leq 1.$$

- A partir de estas funciones de probabilidad o densidad condicionadas, se pueden calcular la media y la varianza de cada una de estas variables condicionadas.

Esperanza y varianza condicionada

- **Ejemplo**: Variables discretas

$$E[X|Y=2] = 1(0,13) + 2(0,87) = 1,87.$$
$$V[X|Y=2] = (1^2(0,13) + 2^2(0,87)) - (1,87)^2 = 0,11.$$

- **Ejemplo**: Variables continuas

$$E[X|Y=0,2] = \int_0^1 x \left(\overbrace{\frac{x+0,2}{0,7}}^{f(x|y=0,2)} \right) dx = 0,61.$$

$$V[X|Y=0,2] = \int_0^1 x^2 \left(\frac{x+0,2}{0,7} \right) dx - (0,61)^2 = 0,08.$$

Independencia

- Se dice que las variables aleatorias X e Y son independientes si y sólo si su función de probabilidad/densidad conjunta es el producto de sus funciones de probabilidad/densidad marginales

$$p(x, y) = p_X(x)p_Y(y) \quad \Big(f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)\Big)$$

para todos los valores x de X e y de Y.

- O alternativamente si

$$p(y|x) = p_Y(y) \quad \Big(f(y|x) = f_Y(y)\Big) \quad \text{ó} \quad p(x|y) = p_X(x) \quad \Big(f(x|y) = f_X(x)\Big)$$

para todos los valores x de X e y de Y.

Asociación lineal

La Covarianza mide el grado de asociación lineal entre dos variables aleatorias:

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= \sigma_{xy} = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] = E[XY]-E[X]E[Y] \\
&= \sum_x \sum_y x\cdot y\cdot p(x,y) - E[X]E[Y] \quad \text{si X e Y son discretas} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x\cdot y\cdot f(x,y)\,dx\,dy - E[X]E[Y] \quad \text{si X e Y son continuas}
\end{aligned}
$$

Ejemplo X e Y v.a. discretas con

$x \setminus y$	0	1	2	3
1	0,08	0,07	0,04	0,01
2	0,10	0,35	0,26	0,09

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= 1\cdot 0\cdot 0,08 + 1\cdot 1\cdot 0,07 + 1\cdot 2\cdot 0,04 + 1\cdot 3\cdot 0,01 \\
&+ 2\cdot 0\cdot 0,1 + 2\cdot 1\cdot 0,35 + 2\cdot 2\cdot 0,26 + 2\cdot 3\cdot 0,09 \\
&- \overbrace{(1,8)(1,32)}^{E[X]E[Y]} = 0,33 - 0,44 = -0,11
\end{aligned}
$$

Asociación lineal

Sean X e Y variables aleatorias, la correlación entre X e Y es

$$Cor(X,Y) = r_{xy} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

- $-1 \leq Cor(X,Y) \leq 1$.
- Si la correlación es 0, indica que no existe ninguna relación lineal entre las variables. Si las variables son independientes, la correlación es 0.
- Una correlación positiva indica que, si una variable aleatoria es grande (pequeña), la otra tiene una probabilidad mayor de ser grande (pequeña): la variables son dependientes positivamente.
- Una correlación negativa indica que, si una variable aleatoria es grande (pequeña), la otra tiene una probabilidad mayor de ser pequeña (grande): la variables son dependientes negativamente.

Esperanza de funciones de variables

Sean X e Y variables aleatorias, la esperanza de cualquier función $g(X, Y)$ de estas variables se define como

$$E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) \cdot p(x,y) \quad \text{si X e Y son discretas}$$

ó

$$E[g(X,Y)] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(x,y) \cdot f(x,y) dxdy \quad \text{si X e Y son continuas}$$

Ejemplo Esperanza del producto (como en el cálculo de la covarianza)

$$\begin{aligned} E[XY] &= \\ &= \sum_x \sum_y x \cdot y \cdot p(x,y) \quad \text{si X e Y son discretas} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x \cdot y \cdot f(x,y)\, dx\, dy \quad \text{si X e Y son continuas} \end{aligned}$$

Esperanza y varianza de funciones lineales

Propiedades:

- $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$
- $E[X-Y] = E[X] - E[Y]$
- $V[X \pm Y] = V[X] + V[Y] \pm 2 \cdot Cov(X,Y)$

  Si $Cov(X,Y) = 0$

  $$V[X \pm Y] = V[X] + V[Y]$$

- $E[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \ldots + E[X_n]$
- $V[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] = V[X_1] + V[X_2] + \ldots + V[X_n]$

  si la covarianza entre cada par de variables es 0