

# Capítulo 6

## Gráficos de control con memoria

### 6.1 Introducción

Cuando en un proceso se produce un desajuste muy pequeño, los gráficos estudiados en los temas anteriores pueden ser poco efectivos. El problema que tienen ante pequeños cambios es que tardan mucho tiempo en detectar el desajuste. En este tema se presentan procedimientos alternativos que son más apropiados que los ya vistos para detectar pequeños desajustes con más rapidez. Por contra, son menos apropiados para detectar desajustes grandes, por lo que son complementarios, y no sustitutivos, de los ya vistos. La idea de los gráficos de control que se presentan en este tema es que la representación gráfica no se basa en las observaciones individuales, o promedios de una muestra de ellas, sino en la acumulación de información. Por esta razón se les denomina *gráficos con memoria*. Supongamos que se desea controlar la evolución de una variable  $X$  que mide cierta característica de calidad. Las sucesivas observaciones de dicha variable serán:  $x_1, x_2, x_3, \dots$ . Supongamos que idealmente dicha característica  $X$  debe tomar el valor no-

minal  $\mu$ . Por tanto los valores

$$d_1 = (x_1 - \mu)$$

$$d_2 = (x_2 - \mu)$$

$$d_3 = (x_3 - \mu)$$

...

será la sucesión de las desviaciones respecto del nivel de referencia  $\mu$ . Los gráficos estudiados en los temas anteriores pueden verse, en cierta forma, como gráficos basados en la evolución de  $d_i$ . Si ocurriese un desajuste muy pequeño, la evolución de los valores  $d_1, d_2, d_3, \dots$  sería poco eficaz para detectarlo. Es más efectivo hacer una representación gráfica basada en  $d_1, d_1 + d_2, d_1 + d_2 + d_3, \dots$  etc, de forma que en cada instante se considera también la información histórica. Un desajuste pequeño se irá así acumulando hasta que sea evidente su detección. Los gráficos mostrados en este tema explotan esta idea de distintas formas.

## 6.2 Gráficos CUSUM

El término *cusum* procede del inglés *cumulative-sum*, que significa suma acumulada. Los gráficos *cusum* se basan en la representación de la acumulación de las desviaciones de cada observación respecto a un valor de referencia. La principal cualidad de este tipo de gráficos es que detectan pequeñas desviaciones del estado de control más rápidamente que los gráficos mostrados en los anteriores capítulos. Veamos la idea de este tipo de gráficos con un ejemplo. La tabla 6.1 muestra los valores del tiempo de espera en la atención a clientes que llamaban a una línea comercial (línea 902). Es el tiempo, en segundos, desde que se realiza la conexión telefónica (desde que contestan a la llamada) hasta que se es atendido por el personal técnico (incluyendo el tiempo de espera con la típica música de fondo). Se ha estimado con información histórica que, cuando el proceso está bajo control, el tiempo de espera se puede aproximar a una normal  $X_i \sim \mathcal{N}(25, 5)$ .

Los 15 primeros datos de la tabla corresponden a una situación en la que el proceso esta bajo control: todos los operadores trabajaban en condiciones normales de trabajo y la demanda estaba en los niveles habituales. A partir de la observación 16 (inclusive) cambia el turno de trabajo, incorporándose varios operadores con poca experiencia, por esta razón se sospecha que el tiempo de espera puede aumentar.

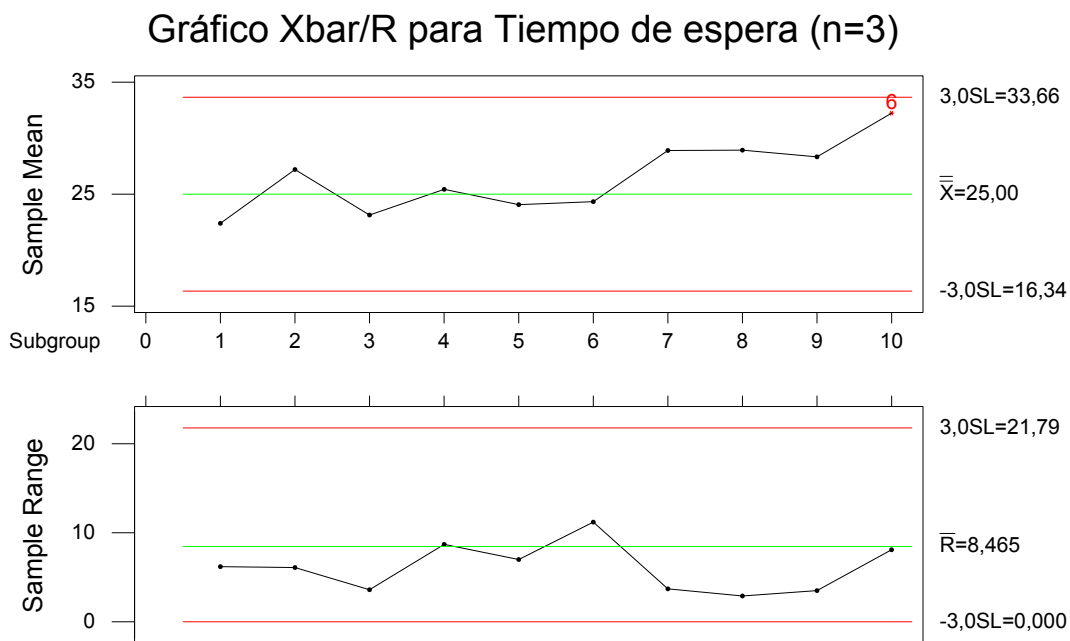


Figura 6.1: gráfico Xbar/R para los datos del tiempo de espera ( $n = 3$ )

La figura 6.1 muestra el gráfico de control media-rango ( $\bar{X} - R$ ) tomando grupos de 3 observaciones. Las características de este gráfico serán:

$$\begin{aligned}
 LCS &= 25 + 3\frac{5}{\sqrt{3}} = 33,66 \\
 LC &= 25 \\
 LCI &= 25 - 3\frac{5}{\sqrt{3}} = 16,34
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

Asimismo, la figura 6.2 muestra el gráfico de observaciones individuales. Las características de este gráfico, al usar la información de que  $X_i \sim \mathcal{N}(25, 5)$

Obsv.	Turno	T. de Espera		
$i$		$x_i$	$(x_i - 25)$	$C_i = C_{i-1} + (x_i - 25)$
1	A	26.1	1.1	1.1
2	A	19.9	-5.1	-4
3	A	21.2	-3.8	-7.8
4	A	30.4	5.4	-2.4
5	A	24.3	-0.7	-3.1
6	A	26.9	1.9	-1.2
7	A	25.4	0.4	-0.8
8	A	21.8	-3.2	-4
9	A	22.2	-2.8	-6.8
10	A	27.2	2.2	-4.6
11	A	20.2	-4.8	-9.4
12	A	28.9	3.9	-5.5
13	A	27.8	2.8	-2.7
14	A	20.8	-4.2	-6.9
15	A	23.6	-1.4	-8.3
16	B	24.0	-1	-9.3
17	B	18.9	-6.1	-15.5
18	B	30.1	5.1	-10.3
19	B	27.4	2.4	-7.9
20	B	28.2	3.2	-4.7
21	B	31.1	6.1	1.4
22	B	30.1	5.1	6.5
23	B	29.5	4.4	6.4
24	B	27.2	2.2	6.6
25	B	28.1	3.1	9.7
26	B	30.2	5.2	8.7
27	B	26.7	1.7	8.4
28	B	37.3	12.3	20.7
29	B	30.2	5.2	25.9
30	B	29.2	4.2	24.8

Tabla 6.1: Datos del ejemplo de tiempo de espera

Gráfico Individual para Tiempo de Espera

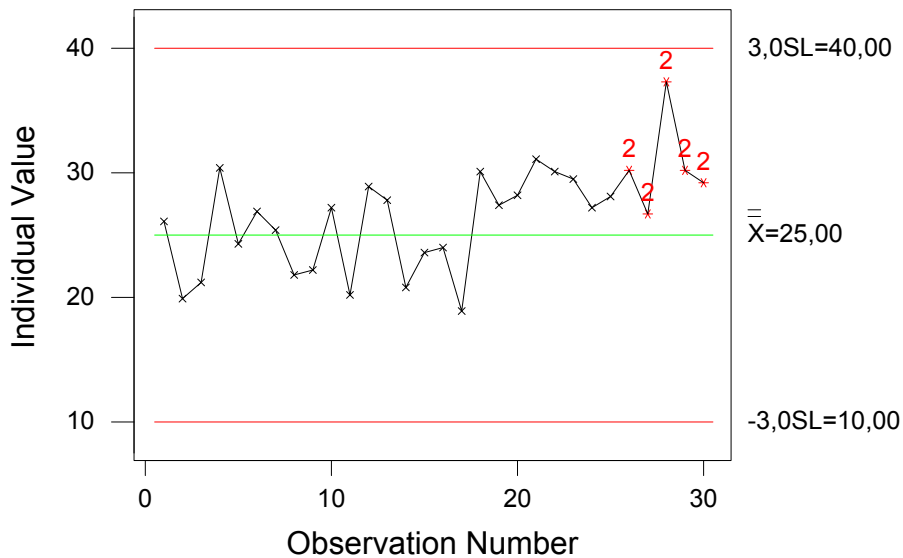


Figura 6.2: gráfico individual para los datos del tiempo de espera con alertas activadas

son también inmediatas:

$$\begin{aligned}
 LCS &= 25 + 3 \times 5 = 40 \\
 LC &= 25 \\
 LCI &= 25 - 3 \times 5 = 10
 \end{aligned}
 \tag{6.2}$$

A la vista de estos límites de control se concluiría que se está bajo control antes y después del cambio de turno (ocurrido en la observación 16). La única forma de detectar alguna anomalía es con un test de aleatoriedad (de rachas o run tests). De esta forma, podría observarse que en el gráfico  $\bar{X} - R$  las últimas 4 observaciones están a más de  $1\sigma$ , lo que podría ser indicio de estar fuera de control. Asimismo, el gráfico de observaciones individuales muestra una sucesión muy numerosa de puntos que están por encima de la línea central, lo cual sería también indicio de estar fuera de control.

Veamos a continuación cómo un gráfico basado en la acumulación de

desviaciones ayudaría a detectar de forma más clara que la media ha cambiado con el cambio de turno. Para ello se anotan las desviaciones de cada valor respecto del valor medio nominal  $\mu = 25$  (columna 4 de la tabla 6.1). A continuación se van sumando estas desviaciones en la columna 5, donde cada valor  $C_i$  es la suma de todas las desviaciones hasta esa observación, es decir

$$\begin{aligned}
 C_1 &= (x_1 - 25), \\
 C_2 &= (x_1 - 25) + (x_2 - 25) = C_1 + (x_2 - 25), \\
 &\dots \\
 C_{30} &= \sum_{i=1}^{30} (x_i - 25) = C_{29} + (x_{30} - 25).
 \end{aligned}$$

Gráficos de desviaciones acumuladas al valor nominal

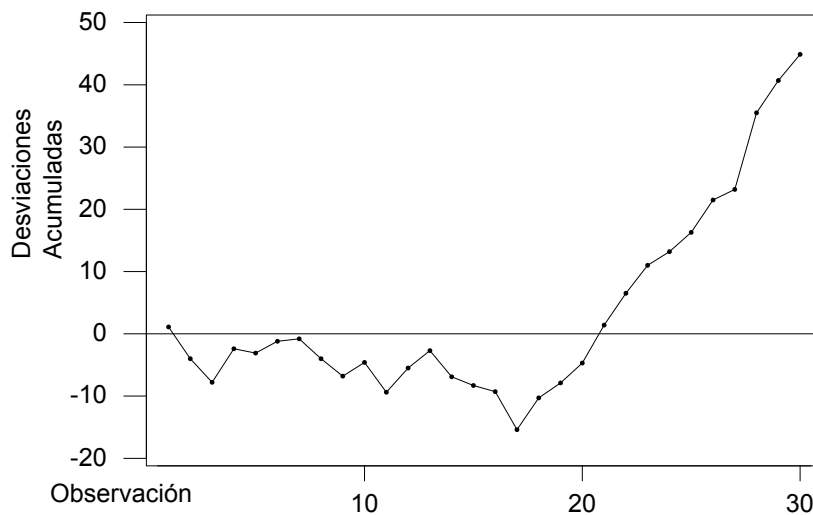


Figura 6.3: gráfico de desviaciones al valor nominal  $\mu = 25$  de los datos de tiempos de espera

La figura 6.3 es la representación de  $C_i, i = 1, \dots, 30$ . En este gráfico pue-

de apreciarse cómo hasta la observación 16 las desviaciones no seguían ningún patrón de aumento ni disminución, por eso al acumularlas producen una senda o trayectoria sin ningún tipo de tendencia. Los valores de  $C_i$  evolucionan alrededor de su valor medio, que es cero. En efecto, si  $E(X_k) = \mu$ , para  $k = 1, 2, \dots$ , entonces  $E(X_k - \mu) = 0$  y por tanto

$$E(C_k) = E\left[\sum_{i=1}^k (x_i - \mu)\right] = \sum_{i=1}^k E(x_i) - k\mu = k\mu - k\mu = 0$$

y la suma acumulada  $C_k$  tendrá una trayectoria (o senda) que, de forma aleatoria, evolucionará alrededor de una horizontal de valor cero. Por el contrario, si la media cambia y pasa a valer  $E(X_k) = \mu^* = \mu + \delta \neq \mu$ , entonces  $E(X_k - \mu) = \delta$ . Por tanto,

$$E(C_k) = E\left[\sum_{i=1}^k (x_i - \mu)\right] = \sum_{i=1}^k E(x_i) - k\mu = k(\mu + \delta - \mu) = k\delta$$

y la suma acumulada  $C_k$  llevará ahora una senda o trayectoria que evolucionará alrededor de una recta de pendiente positiva o negativa, según el signo de  $\delta$ . En la figura 6.3 puede verse este efecto. A partir de la observación 16, la suma acumulada sigue una tendencia positiva, lo que es indicio de que el nuevo tiempo de espera medio ha aumentado:  $\mu^* > \mu = 25$ .

El siguiente paso para aprovechar la información de la representación cusum es la colocación de límites de control. Tendremos entonces un verdadero gráfico de control que nos proporcionará un criterio objetivo para detectar desajustes. A continuación se mostrarán dos procedimientos para la elaboración de gráficos de control, basados en la representación cusum: El cusum algorítmico y la plantilla-V.

## 6.2.1 Cusum algorítmico

Los gráficos cusum se construyen generalmente para observaciones individuales, aunque pueden construirse para representar la evolución de algún

Obsv.	T. de Espera $x_i$	Desviaciones Positivas			Desviaciones Negativas		
		$C_{i-1}^+ + (x_i - 25)$	$C_i^+$	$N^+$	$C_{i-1}^- - (x_i - 25)$	$C_i^-$	$N^-$
1	26.1	1.1	0	0	-1.1	0	0
2	19.9	-5.1	0	0	5.1	2.6	1
3	21.2	-3.8	0	0	6.4	3.9	2
4	30.4	5.4	2.9	1	-1.5	0	0
5	24.3	2.2	0	0	0.7	0	0
6	26.9	1.9	0	0	-1.9	0	0
7	25.4	0.4	0	0	-0.4	0	0
8	21.8	-3.2	0	0	3.2	0.7	1
9	22.2	-2.8	0	0	3.5	1.0	2
10	27.2	2.2	0	0	-1.2	0	0
11	20.2	-4.8	0	0	4.8	2.3	1
12	28.9	3.9	1.4	1	-1.6	0	0
13	27.8	4.2	1.7	2	-2.8	0	0
14	20.8	-2.5	0	0	4.2	1.7	1
15	23.6	-1.4	0	0	3.1	0.6	2
16	24.0	-1	0	0	1.6	0	0
17	18.9	-6.1	0	0	6.1	3.6	1
18	30.1	5.1	2.6	1	-1.5	0	0
19	27.4	5.0	2.5	2	-2.4	0	0
20	28.2	5.7	3.2	3	-3.2	0	0
21	31.1	9.3	6.8	4	-6.1	0	0
22	30.1	11.9	9.4	5	-5.1	0	0
23	29.5	13.9	11.4	6	-4.5	0	0
24	27.2	13.6	11.1	7	-2.2	0	0
25	28.1	14.2	11.7	8	-3.1	0	0
26	30.2	16.9	14.4	9	-5.2	0	0
27	26.7	16.1	13.6	10	-1.7	0	0
28	37.3	25.9	23.4	11	-12.3	0	0
29	30.2	28.6	26.1	12	-5.2	0	0
30	29.2	30.3	27.8	13	-4.2	0	0

Tabla 6.2: Datos del ejemplo de tiempo de espera para el gráfico CUSUM,  $K = 2, 5$



estadístico, media, varianza..., de muestras de tamaño  $n > 1$ . Supongamos que se desea controlar la evolución de una variable  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma)$ , donde  $\sigma$  es conocida o se posee una estimación. El cusum algorítmico (o tabular) calcula las desviaciones de cada valor respecto del valor objetivo o nominal  $\mu_0$ . Se distinguirá entre desviaciones positivas y negativas, puesto que en muchas situaciones ambas desviaciones no tienen la misma repercusión. En el ejemplo que se está utilizando del tiempo de espera en un servicio telefónico, no tiene la misma importancia un aumento del tiempo de espera (deterioro del servicio) que una disminución (mejora del servicio).

Es necesario definir un valor  $K$  a partir del cuál se considera que la desviación acumulada es significativa. Este valor determinará la sensibilidad del gráfico de control. Si la suma acumulada hasta la observación  $i$ -ésima es menor que cierto umbral  $K$ , se considera que la desviación acumulada es cero. Si el gráfico es insensible a desviaciones no significativas, será más fácil visualizar las desviaciones que sean significativas. La representación gráfica será más limpia. Uniendo esta idea de desviación significativa con las de separación de desviaciones positivas y negativas se tendrán dos tipos de *sumas significativas acumuladas* :  $C_i^+$  para las desviaciones positivas y  $C_i^-$  para las negativas. Estas sumas acumuladas se definen de la siguiente forma:

- $C_i^+$  =acumulación de desviaciones positivas significativas:

$$C_i^+ = \max[0, \{C_{i-1}^+ + (x_i - \mu_0)\} - K].$$

De esta forma, si el proceso está bajo control, la variable  $X_i$  tomará valores cercanos al nominal y el término  $C_i^+$  tenderá a tomar valores nulos.

- $C_i^-$  =acumulación de desviaciones negativas significativas:

$$C_i^- = \max[0, \{C_{i-1}^- - (x_i - \mu_0)\} - K].$$

El valor de  $K$  se suele elegir en función de la desviación que se quiera detectar. Supongamos que el valor nominal de la variable de interés es  $\mu_0$ .

Gráfico CUSUM para Tiempo de Espera

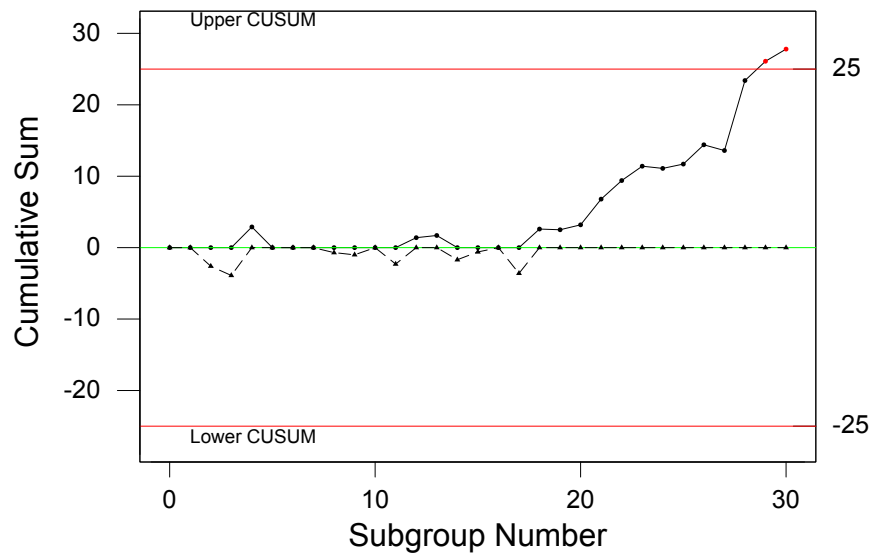


Figura 6.4: Gráfico CUSUM para Tiempo de Espera con valor nominal  $\mu = 25$ ,  $h = 5$  y  $k = 0,5$  de los datos de tiempos de espera

Supongamos que se desea detectar que el proceso se ha desajustado pasando de un nivel medio  $\mu_0$  a un nuevo nivel medio  $\mu_1$ . Este valor puede expresarse en función del número de desviaciones típicas que le separan de  $\mu_0$ . Por tanto,

$$\mu_1 = \mu_0 + \delta * \sigma,$$

o bien

$$\mu_1 = \mu_0 - \delta * \sigma,$$

con  $\delta > 0$ . Se suele tomar como valor umbral  $K$  a la mitad de la distancia entre  $\mu_1$   $\mu_0$ , es decir,

$$K = \frac{\delta}{2} \sigma = \frac{|\mu_0 - \mu_1|}{2}.$$

O bien,

$$K = k\sigma; \quad k = \frac{\delta}{2}$$

Por ejemplo, si se desea detectar un cambio en el tiempo medio de espera de los clientes del servicio telefónico de una desviación típica se tendría que  $\mu_1 = 30$  y

$$K = \frac{1}{2}5 = 2,5.$$

Con este valor se puede ya calcular las sumas acumuladas  $C_i^+$  y  $C_i^-$ , tomándose como valores iniciales  $C_0^+ = C_0^- = 0$ . Estos valores se encuentran en la tabla 6.2. En esta tabla se incluyen las columnas  $N^+$  y  $N^-$ , que indican el número de términos consecutivos con sumas acumuladas  $C^+$  o  $C^-$  no negativos.

Los valores de las sumas acumuladas  $C_i^+$  y  $C_i^-$  se han de comparar con el valor máximo admisible. Este valor, denominado *valor de decisión H* suele ser:

$$H = h\sigma,$$

donde se recomienda que  $h = 5$ , por tanto  $H = 5\sigma$  (algunos autores también recomiendan valores de  $h = 4$ ). Los valores  $\pm H$  son los límites de control de este gráfico. En el presente ejemplo corresponderán a  $H = 25$ . Puede observarse en la tabla 6.2 que este valor es superado en las observaciones 29 y 30 por  $C_i^+$  por lo que se concluye que el proceso está fuera de control en esos puntos. Mirando a la columna  $N^+$  puede verse cuándo ha podido comenzar el cambio en la media que ha llevado al estado de fuera de control. Al valor  $N^+ = 13$  se puede concluir que el desajuste podría haber comenzado en la observación 18, lo cual es compatible con el efecto de cambio de turno, que comenzó en la observación 16. La figura 6.4 muestra gráficamente estos resultados por tanto, con este gráfico se ha detectado que ha ocurrido un cambio positivo en el tiempo medio de espera, que dicho cambio podría haber comenzado en la observación 18 y que es de poca magnitud al no haberse detectado en los gráficos de control habituales. La cuantificación de este desajuste se puede hacer de la siguiente manera. Si comparamos la media de la variable 'tiempo de espera' en el segundo turno es

$$\frac{\sum_{i=16}^{30} x_i}{15} = 28,5,$$

por lo tanto el cambio en la media ha sido de

$$\hat{\delta} = \frac{|28,5 - 25|}{\sigma} = 0,7 \text{ desviaciones típicas,}$$

que es un cambio muy pequeño. En general, los gráficos de control habituales son útiles para detectar desviaciones del orden de  $2\sigma$  y los gráficos cusum para detectar cambios más pequeños. Por tanto lo recomendable es usarlos conjuntamente.

#### Estrategia de Respuesta Inicial Rápida

Tras una señal de alarma en el gráfico Cusum debemos buscar la causa asignable que la originó. Puede suceder que dicha causa exista pero no la encontremos o que existan varias causas concurrentes y sólo parte de ellas sean corregidas. En tales circunstancias, sería deseable que el gráfico nos volviera a detectar de la salida de control tan rápido como sea posible. Con este fin, existe una estrategia que consiste en substituir los valores iniciales de  $C_0^+$  y  $C_0^-$  iguales a 0 por los siguientes valores:

$$C_0^+ = C_0^- = H/2,$$

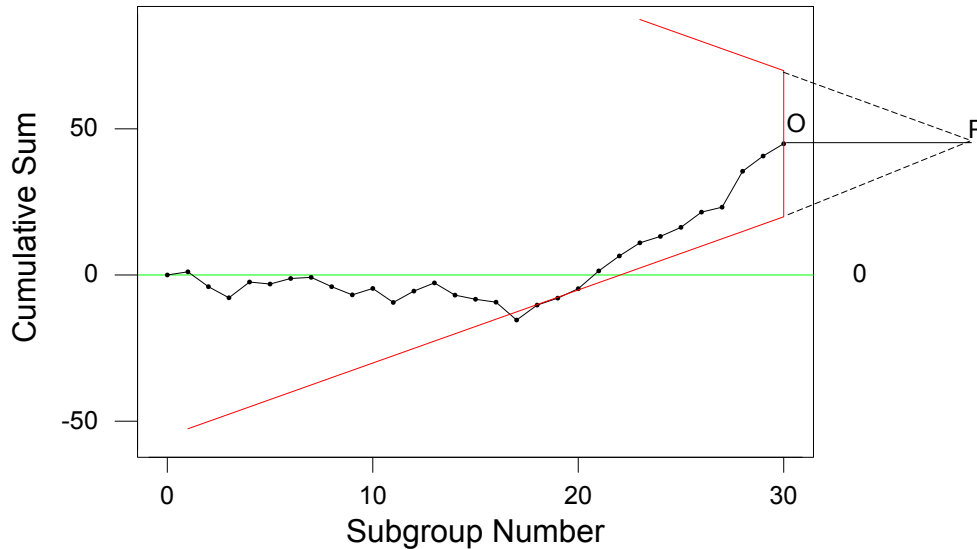
esta inicialización a medio camino del valor de decisión se conoce en inglés como FIR (fast initial response). Se ha comprobado que bajo control el FIR no reduce sensiblemente el ARL, y sin embargo sí reduce notablemente el valor ARL para desviaciones pequeñas del valor nominal

### 6.2.2 Plantilla V

El procedimiento de la *plantilla V* es el procedimiento más popular de gráfico cusum, estando implementado en muchos paquetes estadísticos. La *plantilla V* se basa en la representación gráfica del estadístico cusum

$$C_i = \sum_{j=1}^i (x_j - \mu_0)$$

### Gráfico CUSUM para Tiempo de Espera



**Figura 6.5: Gráfico CUSUM bilateral (con plantilla V) para Tiempo de Espera, plantilla situada en la última observación**

aunque algunos programas informáticos utilizan la estandarización de la variable de interés  $x_j$ ; es decir,

$$C_i = \sum_{j=1}^i \left( \frac{x_j - \mu_0}{\sigma} \right),$$

donde  $\mu_0$  es el valor nominal de referencia y  $\sigma$  la desviación típica (conocida o estimada) de la variable de interés  $x$ . Junto a la representación de  $C_j$  se coloca la conocida como plantilla V, que es un ángulo junto con una línea horizontal. El extremo izquierdo de la línea horizontal (punto O) se coloca en una de las observaciones, y en el extremo derecho de dicho segmento horizontal (punto P) se coloca el vértice del ángulo. En estas plantillas, la distancia OP y el ángulo  $\omega$  determinan la sensibilidad del gráfico de control. La figura 6.5 muestra un gráfico cusum donde la plantilla está en la última

observación.

Usualmente la plantilla se coloca en la última observación disponible, con la recta OP paralela al eje de abscisas. Si los valores previos  $C_1, C_2, \dots$  están dentro de los dos segmentos del ángulo de la plantilla V el proceso está bajo control. Por el contrario, si en algún momento algún punto  $C_i$  está fuera del ángulo el proceso está fuera de control. Según esto, la figura 6.5 revela que el proceso está fuera de control.

Muchos paquetes informáticos utilizan el procedimiento de Johnson y Leone para determinar  $\omega$  y la distancia  $d \equiv$  distancia del segmento OP. Estos parámetros se fijan de la siguiente forma:

$$d = \frac{2 \sigma^2}{\delta^2 \bar{n}} \ln \left( \frac{1 - \beta}{\alpha/2} \right)$$
$$\omega = \arctan \left( \frac{\delta}{2A} \right)$$

donde:

- $A$  depende de la escala del gráfico. Es la distancia horizontal entre puntos sucesivos del eje de abscisas medida en las unidades del eje de ordenadas. Si el gráfico se realiza con un programa estadístico este parámetro viene ya predeterminado y no necesita calcularlo el analista.
- $\delta$  es la sensibilidad del análisis y es el grado de desajuste que queremos detectar, en número de desviaciones típicas. Si queremos detectar que la media aumente de  $\mu_0$  a  $\mu_1$  se tiene que

$$\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$$

- $\alpha$  es la probabilidad de una falsa alarma cuando el proceso está bajo control,
- $\beta$  es la probabilidad de NO detectar una desviación  $\delta$ .
- $\bar{n}$  es el promedio de los tamaños muestrales. Si el gráfico es de observaciones individuales se tendrá  $\bar{n} = 1$

La figura 6.5 ha sido realizada con los valores  $\mu_0 = 25$ ,  $\sigma = 5$ ,  $\delta = 1$ ,  $\alpha = 0,05$ ,  $\beta = 0,05$ ,  $\bar{n} = 1$ . Como no es fácil hacer una buena determinación de  $\alpha$  y  $\beta$ , una buena recomendación sería utilizar varios valores de  $\alpha$  y  $\beta$  cercanos. De esta forma nos aseguraremos que el resultado sigue siendo el mismo con pequeñas desviaciones de estos parámetros.

Autores como Montgomery [Montgomery 05] desaconsejan esta forma de implementar el gráfico cusum (con máscara V) y prefieren el gráfico asociado al Cusum algorítmico. Las razones de este rechazo son fundamentalmente las siguientes:

- No es posible adaptar algunos de los procedimientos de mejora tales como la respuesta inicial rápida.
- En ocasiones no está claro cuánto debemos extender hacia atrás los brazos de la plantilla, dificultando la interpretación por partes del usuario.
- Ambigüedad entre  $\sigma$  y  $\beta$  en el procedimiento de Johnson y Leone.

### 6.2.3 Comparación entre el gráfico CUSUM y el gráfico de Shewhart

Existen tablas que nos dan el  $ARL(\delta)$  en función de los parámetros de la máscara (o plantilla V) o del gráfico de control CUSUM cuando se produce una desviación de  $\delta\sigma$  unidades en la media del proceso. Algunas nos dan los valores de los parámetros del gráfico que minimizan el  $ARL(\delta)$  para un valor fijo de  $ARL(0)$  (tiempo medio necesario para declarar una falsa alarma).

En la tabla 6.3 se recogen algunos valores que permiten comparar la sensibilidad del gráfico CUSUM y el de Shewhart. Supongamos que fijamos el  $ARL(0)$  de ambos gráficos a 500, esto representa en los gráficos de Shewhart unos límites de control situados en  $\pm 3,13\sigma$ .

$\delta$	CUSUM	Shewhart
0	500	500
,5	30	214,5
1	10,5	65,2
1,5	5,4	18,2
2	3,4	7,35
3	2,6	2,2

Tabla 6.3: ARL( $\delta$ ) para gráficos CUSUM y de Shewhart comparables

$k$	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5
$h$	8.01	4.77	3.34	2.52	1.99	1.61

Tabla 6.4: Valores asociados de  $k$  y  $h$  correspondientes a un ARL(0) en gráficos Cusum bilaterales

Se puede observar que el gráfico CUSUM es mucho más sensible que el de Shewhart para detectar variaciones pequeñas. Para las variaciones grandes ambos gráficos son similares o incluso CUSUM algo peor.

Recordemos que un gráfico de control del tipo Shewhart con límites 3-sigma viene a tener un ARL(0) (bajo control) de 370 unidades. La tabla 6.4 (tomada de [Hawkins 1993]) nos da los valores de  $k$  y  $h$  que deben corresponderse para que un gráfico Cusum (bilateral) tenga un ARL(0) también de 370 unidades.

También resulta interesante comparar el ARL de diversas variantes de los gráficos Cusum. En la tabla 6.5 podemos ver el ARL de un gráfico Cusum tabular con  $k = 0.5$ , los dos valores de  $h$  (4 ó 5) y del gráfico Cusum con FIR (y  $h = 5$ )

Nos hemos limitado a presentar los gráficos CUSUM para el estadístico  $\bar{X}$  o  $X$ ; las mismas ideas pueden extenderse a otros estadísticos: rangos, desviaciones, proporciones, etc. Existen referencias bibliográficas [Ryan, 1989] donde se pueden consultar las diferentes variaciones de estos gráficos para estos otros estadísticos comunes en el Control de Calidad.



$\delta$	CUSUM ( $h = 4$ )	CUSUM ( $h=5$ )	CUSUM ( $h=5$ ) + FIR
0	168	465	430
,5	26,6	38	28,7
1	8,38	10,4	6,35
1,5	4,75	5,75	3,37
2	3,34	4,01	2,36
3	2,19	2,57	1,54

Tabla 6.5:  $ARL(\delta)$  para diversas variantes de gráficos CUSUM

### 6.3 Gráficos EWMA

Los gráficos EWMA o de medias móviles ponderadas exponencialmente (*EWMA= exponentially weighted moving-average*) se realizan usualmente sobre observaciones individuales. En este gráfico también se acumula en cada periodo los valores de observaciones pasadas. La variable que se representa en cada periodo es un promedio de la observación contemporánea y las observaciones anteriores, donde se da más peso a las observaciones más recientes. En general, a este tipo de promedios donde en cada instante se incorpora nueva información y se le va restando peso a las informaciones históricas se le denomina media móvil (en inglés *moving average*). Los gráficos EWMA utilizan una forma muy concreta de hacer media móviles que consiste en dar un peso a las informaciones históricas que decae exponencialmente con el tiempo. Esta media móvil la denotaremos por  $y_i$ . Se define como

$$y_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)y_{i-1}$$

donde  $y_0 = \mu_0$  o bien  $y_0 = \bar{x}$ , y donde el parámetros  $\lambda$  lo decide el analista en el rango  $0 < \lambda \leq 1$ .

Por tanto, en cada momento, se pondera la observación actual  $x_i$  con el

valor de la media móvil anterior  $y_{i-1}$ . Si sustituimos recursivamente se obtiene:

$$\begin{aligned} y_i &= \lambda x_i + (1 - \lambda)[\lambda x_{i-1} + (1 - \lambda)y_{i-2}] = \lambda x_i + \lambda(1 - \lambda)x_{i-1} + (1 - \lambda)^2 y_{i-2} \\ &= \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda)^j x_{i-j} + (1 - \lambda)^i y_0. \end{aligned}$$

Si los pesos  $\lambda < 0,1$  los pesos  $\lambda(1 - \lambda)^j$  decrecen exponencialmente con  $j$ . Por ejemplo, si  $\lambda = 0,8$  se tiene que los sucesivos pesos que se dan a las observaciones  $x_i, x_{i-1}, \dots$  son  $0,8, 0,16, 0,032, 0,0064, \dots$ . Puede verificarse que

$$\lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda)^j + (1 - \lambda)^i = 1$$

Si se cumplen las hipótesis de independencia y estabilidad sobre  $x_i$  (media y varianza constantes) se tiene que

$$\begin{aligned} E(y_i) &= \mu_0 \\ \text{Var}(y_i) &= \sigma^2 \frac{\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}]}{2 - \lambda}. \end{aligned}$$

Los límites de control y la línea central son entonces:

$$\begin{aligned} LCS &= E(y_i) + k\sqrt{\text{Var}(y_i)} \\ LC &= E(y_i) \\ LCI &= E(y_i) - k\sqrt{\text{Var}(y_i)} \end{aligned} \tag{6.3}$$

Substituyendo los respectivos valores de la media y varianza y para  $k = 3$ , resulta

$$\begin{aligned} LCS &= \mu_0 + 3\sigma\sqrt{\frac{\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}]}{2 - \lambda}} \\ LC &= \mu_0 \\ LCI &= \mu_0 - 3\sigma\sqrt{\frac{\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}]}{2 - \lambda}} \end{aligned} \tag{6.4}$$

Puede verse que los límites varían en cada instante  $i$ . Si  $i$  es muy elevado

se tiene que, aproximadamente,

$$\begin{aligned}
 LCS &= \mu_0 + 3\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \\
 LC &= \mu_0 \\
 LCI &= \mu_0 - 3\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}
 \end{aligned}
 \tag{6.5}$$

Gráfico EWMA para Tiempo de Espera

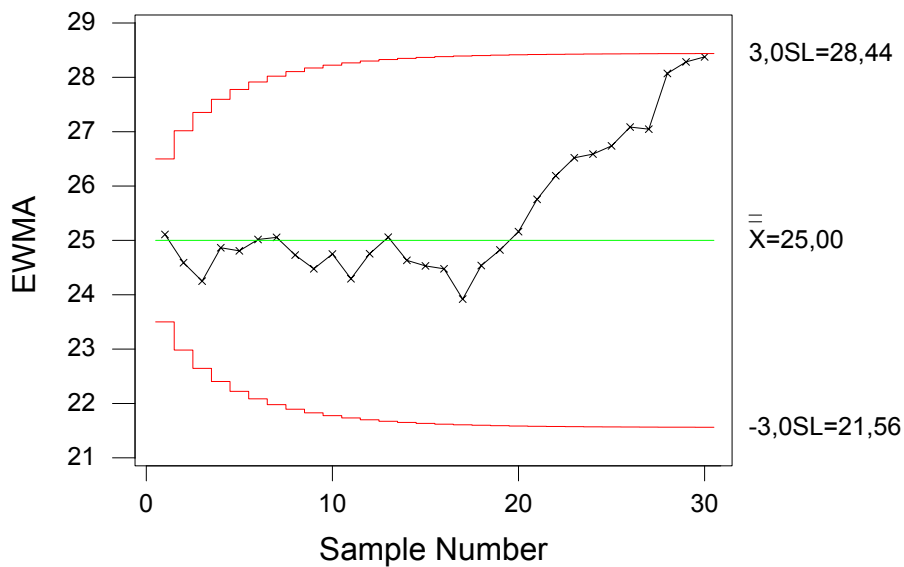


Figura 6.6: Gráfico EWMA para los datos de Tiempo de espera,  $k = 3$  y  $\lambda = 0,1$

En la práctica suelen elegirse valores de  $\lambda$  en el rango  $0,05 \leq \lambda \leq 0,25$ , estando muy extendido el uso de valores  $\lambda = 0,05$ ,  $\lambda = 0,10$  y  $\lambda = 0,20$ . Cuanto mayor sea el valor de  $\lambda$  menos importancia estamos dando los valores alejados en el tiempo. Puesto que este tipo de gráficos se usan para detectar pequeños desajustes, se recomienda utilizar valores de  $\lambda$  bajos. La figura 6.6 muestra el gráfico de control para los datos de tiempo de espera usados anteriormente ( $\mu_0 = 25$ ) y  $\lambda = 0,1$ . Según este gráfico, el proceso está bajo control. La figura 6.7 muestra el gráfico de control para los datos simulados

Gráfico EWMA para datos simulados

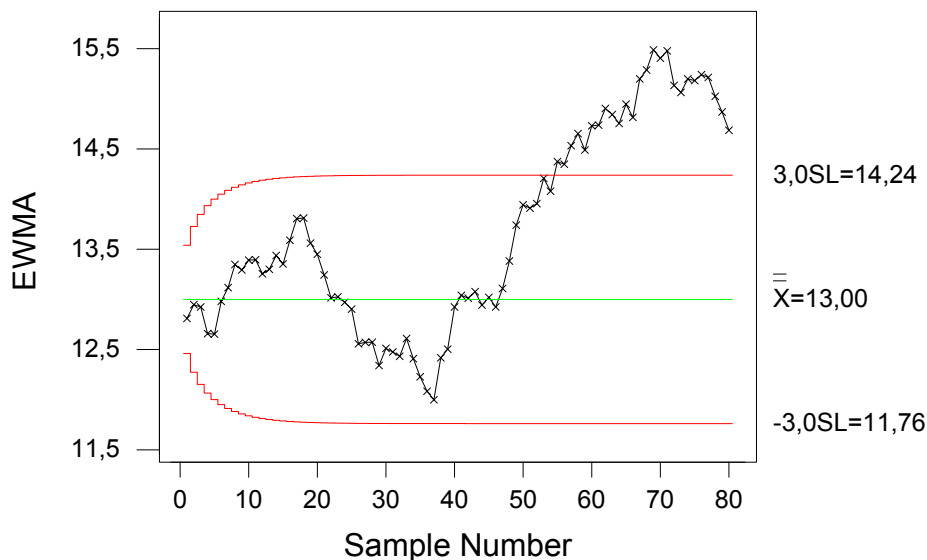


Figura 6.7: Gráfico EWMA para los datos de Tiempo de espera,  $k = 3$  y  $\lambda = 0,1$

( $\mu_0 = 13$ ) y  $\lambda = 0,1$ ; el proceso está fuera de control y la salida de control se detecta en la observación 55.

En general, el gráfico EWMA es menos sensible a pequeñas desviaciones que el gráfico CUSUM. Por esta razón, una recomendación para mejorar el comportamiento de los gráficos EWMA ante pequeñas desviaciones es utilizar un valor de  $k$  en el rango  $2,6 < k < 2,8$  si  $\lambda < 0,1$ . Por tanto, en el ejemplo de los tiempos de espera, en el que se desea detectar desviaciones inferiores a  $1\sigma$ , emplearemos  $\lambda = 0,1$  con  $k = 2,6$ . El gráfico que se obtiene se encuentra en la figura 6.8. En él sí que puede ya apreciarse que el proceso se encuentra fuera de control.

Las recomendaciones anteriores son consecuencias de estudios más profundos sobre estos gráficos, en los que la pareja de parámetros  $(\lambda, k)$  se eligen de forma que fijamos un valor de  $ARL(0)$  igual a 500 bajo control estadístico. También existe la posibilidad de especificar a priori el  $ARL(0)$  y el valor esperado de la desviación  $\delta\sigma$  y podemos calcular los valores  $(\lambda, k)$  que minimi-

Gráfico EWMA para Tiempo de Espera

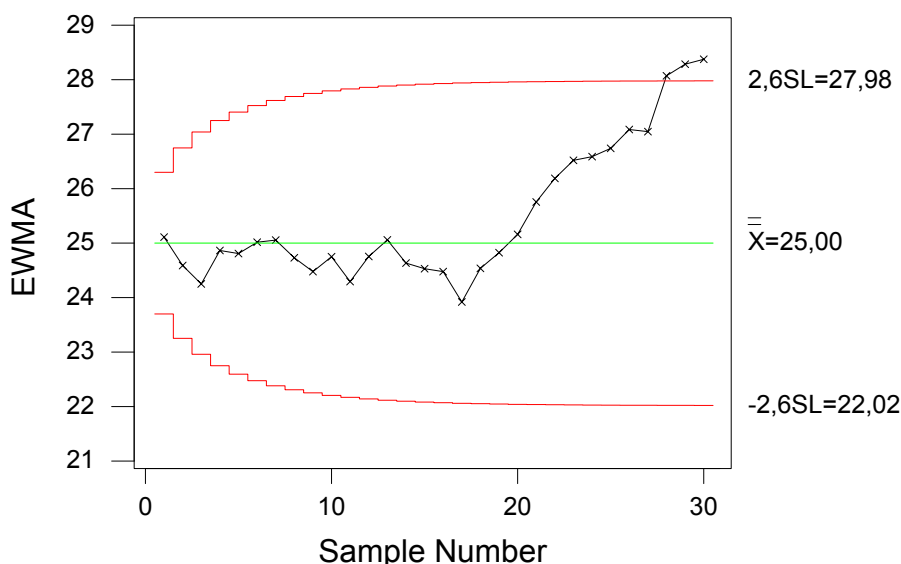


Figura 6.8: Gráfico EWMA para los datos de Tiempo de espera,  $k = 2,6$  y  $\lambda = 0,1$

zan el valor del  $ARL(\delta)$  para ese valor prefijado. También existe la posibilidad de fijar  $k = 3$  y tomar  $\lambda$  como el valor que minimiza la suma de cuadrados  $\sum_{i=1}^n (y_{i-1} - x_i)^2$

Similar a la tabla 6.3 presentamos otra tabla donde añadimos los valores ARL correspondientes a gráficos EWMA con valores elegidos de forma que sean comparables a los otros dos tipos.

El comportamiento es mejor que el gráfico de Shewhart y comparable al CUSUM frente a pequeñas desviaciones de la media.

Los gráficos EWMA de datos individuales ( $n = 1$ ) se comportan de forma más robusta frente a desviaciones de la hipótesis de normalidad que los gráficos Shewhart.

Una ventaja adicional del gráfico EWMA es la capacidad de predecir la

$\delta$	EWMA	CUSUM	Shewhart
0	500	500	500
,5	36	30	214,5
1	10,20	10,5	65,2
1,5	6,0	5,4	18,2
2	4,05	3,4	7,35
3	2,63	2,6	2,2

Tabla 6.6:  $ARL(\delta)$  para gráficos EWMA, CUSUM y Shewhart comparables

magnitud de la desviación producida en la media. Concretamente el valor de  $y_i$  es una predicción del valor de  $\mu$  en el instante  $i + 1$ . Una estimación de la desviación producida obtenida de esta forma puede servir a la hora de decidir el ajuste necesario en el proceso para volverlo a centrar en su valor nominal. Esta característica no se da en los gráficos de Shewhart ni en el gráfico CUSUM.

## 6.4 Gráficos de medias móviles

Sean las observaciones  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . En el gráfico de medias móviles se estudia la evolución del estadístico

$$y_i = \frac{x_i + x_{i-1} + \dots + x_{i-m+1}}{m}.$$

Es, entonces, similar a un gráfico de medias con la diferencia de que de un periodo al siguiente la media tiene elementos comunes. Para los  $m$  valores iniciales la media móvil se realiza con las observaciones disponibles. Si por

ejemplo  $m = 3$ , se tiene:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= x_1 \\
 y_2 &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\
 y_3 &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\
 y_4 &= \frac{x_2 + x_3 + x_4}{3} \\
 \dots &= \dots \\
 y_i &= \frac{x_{i-2} + x_{i-1} + x_i}{3}
 \end{aligned}$$

Este gráfico es semejante al anterior en el sentido de que el estadístico promedia, con pesos que suman 1, observaciones pasadas. En este tipo de gráfico se da igual peso a un número pequeño de observaciones recientes y peso cero a las restantes.

Si el proceso es estable en media ( $\mu_0$ ) y dispersión ( $\sigma$ ) y, hay independencia entre las observaciones, se verifica que:

$$\begin{aligned}
 E(y_i) &= \mu_0 \\
 \text{Var}(y_i) &= \frac{\sigma^2}{m}.
 \end{aligned}$$

Por tanto, el gráfico de control es, para las observaciones  $i \geq m$  (gráfico '3 -  $\sigma$ '),

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 LCS &= \mu_0 + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{m}} \\
 LC &= \mu_0 \\
 LCI &= \mu_0 - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{m}}
 \end{aligned}
 } \tag{6.6}$$

mientras que para  $i < m$ , se tiene el siguiente gráfico:

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 LCS &= \mu_0 + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{i}} \\
 LC &= \mu_0 \\
 LCI &= \mu_0 - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{i}}
 \end{aligned}
 } \tag{6.7}$$

Gráfico de Medias Móviles de orden 5  
para Tiempo de Espera

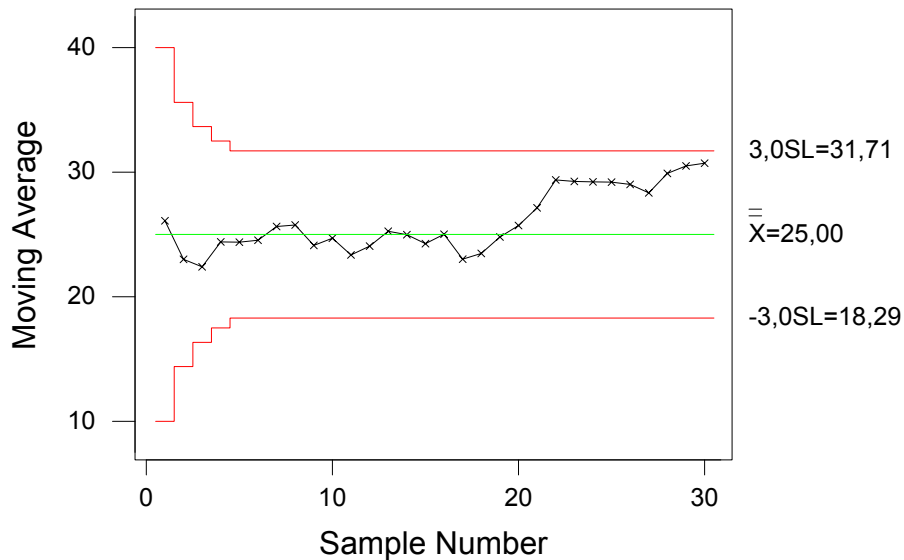


Figura 6.9: Gráfico de medias móviles (MA) de orden 5 para los datos de Tiempo de espera

Si  $\mu_0$  y  $\sigma$  son desconocidos se estimarían a partir de una muestra de datos que procediesen del proceso bajo control. Para ver la evolución de la varianza suele utilizarse un gráfico de rangos móviles tal y como se expuso en el tema 3. El gráfico de medias móviles es, en general, menos efectivo que el gráfico CUSUM y el EWMA. La figura 6.9 muestra el gráfico de medias móviles de orden 5 ( $m = 5$ ) y utilizando que  $\mu_0 = 25$  y  $\sigma = 5$ . Puede verse que este gráfico no es capaz de detectar que en el segundo turno se produce un pequeño deterioro del servicio y que la experiencia del operador de telefonía puede tener una influencia directa en la calidad del servicio.

Para los datos simulados en el ejemplo del capítulo 2, si utilizamos también un gráfico de medias móviles de tamaño 5, se puede ver en la figura 6.10 que se detecta la salida de control.



Gráfico de Medias Móviles de orden 5  
para Tiempo de Espera

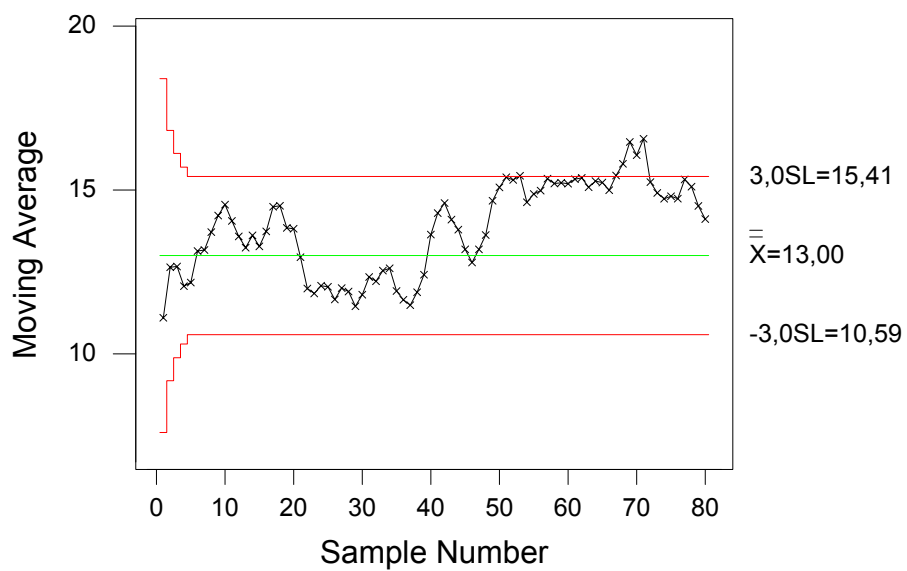


Figura 6.10: Gráfico de medias móviles (MA) de orden 5 para los datos simulados