Teoría Estadística Elemental I
Teoría (resumida) del 3^{er} Tema

Raúl Jiménez
Universidad Carlos III de Madrid

Diciembre 2011

La condición de que la variable tome valores exclusivamente en un conjunto numerable de $\mathbb{R}$ puede resultar muy restrictiva a la hora de modelar determinados fenómenos de naturaleza continua (tiempos, precios, volúmenes, pesos). Es por ello que requerimos generalizar la definición de variable aleatoria vista hasta ahora.

Una **variable aleatoria** (a veces va, por comodidad tipográfica) X sobre un espacio de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ que cumple

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F} \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

La razón por la cual requerimos que X satisfaga (1) es equivalente a la que requerida cuando introducimos el concepto de variables aleatorias discretas. Tal y como ya hemos mencionado, estamos interesados en calcular probabilidades del tipo $P(X \in A)$, con $A \subset \mathbb{R}$, las cuales están definidas si

$$\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F} \tag{2}$$

La condición (1) asegura que (2) se satisface para cualquier $A \subset \mathbb{R}$ que puedan escribirse como un resultado de operaciones numerables (finitas o infinitas) de intervalos. Esta es una importante colección de conjuntos de números reales que se conoce como la σ-álgebra de Borel. En todo lo sucesivo se sobreentiende que si $A \subset \mathbb{R}$ entonces A pertenece a la σ-álgebra de Borel. Elementos simples de la σ-álgebra de Borel son los intervalos (cerrados, abiertos, finitos, infinitos, etc) y los conjuntos numerables.

El concepto de función de distribución que introducimos anteriomente vale para cualquier variable aleatoria, sea discreta o no. La función de distribución

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

de una variable X tiene varias propiedades elementales que son consecuencia de propiedades que hemos visto de la medida de probabilidad P y que resumimos en la siguiente proposición.

Proposición 1. *Sea F la función de distribución de una variable aleatoria, entonces*

1. *F es no decreciente.*

2. *$F(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$ y $F(x) \to 1$ cuando $x \to +\infty$.*

3. *F es continua por la derecha.*

Usando la proposición anterior, podemos establecer algunas fórmulas útiles para el cálculo de probabilidades de eventos asociados a una variable aleatoria a partir de su función de distribución. En particular se tiene que

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) \quad \text{para todo} \quad a < b.$$

Otra identidad que vale la pena reseñar es

$$P(X = x) = F_X(x) - \lim_{y \uparrow x} F_X(y) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Es decir, $P(X = x)$ es el salto de la discontinuidad de F en x, si es que la hubiera.

Variables aleatorias continuas

Aparte de la características comunes que puedan tener distintas funciones de distribución, algunas ya mencionadas en la Proposición 1, a distintas distribuciones le pueden corresponder distintos tipos de curva. Hay dos clases que son particularmente importantes:

- Funciones de distribución escalonadas, correspondientes a variables aleatorias discretas. Note que si X es discreta a valores en $\{x_1, x_2, \ldots\}$ entonces para cualquier $x_i \leq x < x_{i+1}$, la función es constante. De hecho,
$$F_X(x) = F_X(x_i).$$
- Funciones con una curva suave, asociadas a variables aleatorias que llamaremos continuas y que definimos a continuación.

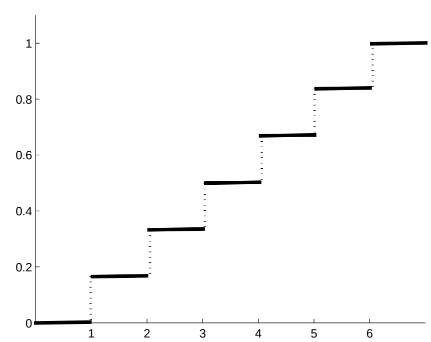

Figura 1: **Función de Distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta**

Definición. Una variable aleatoria es continua si su función de distribución F puede representarse como

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R},$$

para alguna función f que satisfaga

1. $f(x) \geq 0, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R},$

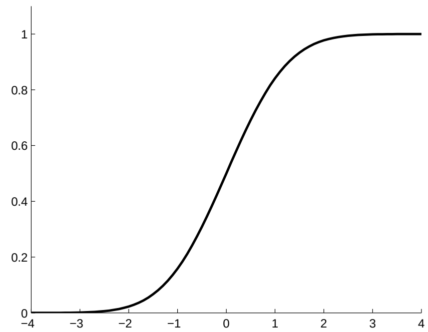

Figura 2: **Función de Distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua**

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$,

En ese caso decimos que X tiene densidad de probabilidad f.

Para interpretar la función de densidad de probabilidad (fdp) de una variable aleatoria continua, observe que

$$\begin{aligned} P(x-\delta/2 < X \leq x+\delta/2) &= F_X(x-\delta/2) - F_X(x-\delta/2) \\ &= \int_{x-\delta/2}^{x+\delta/2} f_X(u)du \approx f(x)\delta, \end{aligned}$$

así que $f(x)$ **está relacionado con la probabilidad de que la variable tome un valor cercano a** x. Sin embargo, es importante recalcar que $f(x)$ **no es una probabilidad**, en particular no tiene por que ser menor o igual a 1. Note además que, acorde a la definición dada, la función de distribución de una va continua es una función continua. Es decir, si X es continua, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{y \to x} F(y) = F(x).$$

Sustituyendo en (3), demostramos que si X es continua

$$P(X = x) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}$$

y en consecuencia, para todo $a < b$

$$P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b).$$

Esta es una significativa diferencia con la variables aleatorias discretas. Veamos algunos ejemplos de fdp comunes en el modelaje.

Distribución Uniforme. Decimos que X se distribuye uniformemente sobre el intervalo (a, b), y escribimos $X \sim U(a, b)$, si tiene fdp

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad x \in (a, b) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Distribución Exponencial y Gamma. Decimos que X tiene distribución exponencial de parámetro $\beta > 0$, y escribimos $X \sim \exp(\beta)$, si tiene fdp

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\beta x} & \text{si } \ x > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Este es un importante caso particular ($\alpha = 1$)de la distribución gamma. En general, decimos que X tiene distribución gamma de parámetros $\alpha, \beta > 0$, y escribimos $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, si tiene fdp

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & \text{si } \ x > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

siendo $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}$ la función gamma, con $\Gamma(n) = n!$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

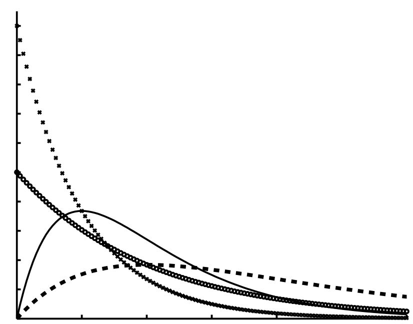

Figura 3: **Funciones de Densidad de probabilidad Gamma**

Distribución Normal. Decimos que X tiene distribución normal, o Gaussiana, de parámetros μ y $\sigma^2 > 0$, y escribimos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, si tiene fdp

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \ \text{ para todo } \ x \in \mathbb{R}$$

Esperanza y funciones de variables aleatorias

El valor esperado de una variable aleatoria continua X viene definido por

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \, dx,$$

siempre y cuando la integral esté bien definida. Esto es, si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) \, dx < \infty.$$

El valor esperado de X puede interpretarse como el *centro de gravedad* del eje x cuando se han distribuído pesos según f_X. El concepto es el mismo que el del caso discreto, sólo que hemos

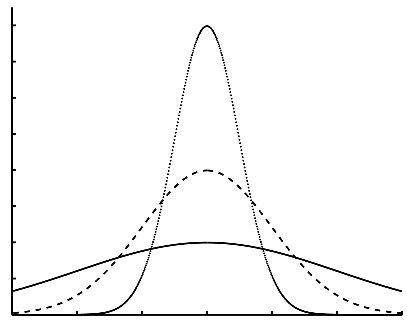

Figura 4: **Funciones de Densidad de probabilidad Normal**

sustituído funciones de masa por densidades de probabilidad y sumatorias por integrales. Así que es natural que las propiedades del valor esperado de variables continuas sean las mismas que las de las discretas. Después de todo la integral no es más que el límite de sumatorias.

Si X es una variable aleatoria continua, cualquier función de X es una variable aleatoria pero puede ser continua o no. Por ejemplo, $Y = X^2$ también será continua si X lo es pero $Y = signo(X)$ es una variable discreta. Sin importar cual sea el caso, el valor esperado de $g(X)$ puede calcularse mediante la **fórmula de transferencia**

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\ dx, \tag{4}$$

similar a la que demostramos para variables discretas (Teorema de transferencia del Capítulo 2). Aunque su demostración general usa herramientas avanzadas de análisis matemático, podemos dar una prueba sencilla cuando g es una función invertible y derivable. En ese caso se tiene

$$\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f_X(x)dx = \int_a^b f_X(g^{-1}(y)) \frac{dg^{-1}(y)}{dy} dy$$

Así que, para todo $a < b$,

$$P(a < g(X) < b) = \int_a^b f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| dy,$$

En otras palabras,

Proposición 2. *Si X es una variable aleatoria continua y g es invertible y derivable, la densidad de probabilidad de la variable $Y = g(Y)$ es*

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|$$

Usando esta proposición y la fórmula de cambio de variable obtenemos que

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx, \end{aligned} \tag{5}$$

con lo cual probamos la fórmula (4) para el caso particular en que g es invertible y derivable. Esta es una potente fórmula con numerosas aplicaciones y consecuencias, a continuación, sumarizamos algunas importantes.

Proposición 3. *Para todo $a, b \in \mathbb{R}$,*

- $E[aX + b] = aE[X] + b$
- *La varianza de una variable continua X es*

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

- $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$