

Teoría Estadística Elemental I

Ejercicios del 2º Tema

Aurea Grané y Raúl Jiménez
Universidad Carlos III de Madrid

Octubre 2012

1. Sea X una v.a. que representa el número de caras menos el número de cruces obtenidas al lanzar 3 veces una moneda trucada, de manera que es dos veces más probable obtener una cara que una cruz.
 - a) Determinar el espacio muestral Ω y asignar a cada elemento un valor de X .
 - b) Escribir la función de probabilidad de X y dibujarla.
 - c) Obtener la función de distribución de X y dibujarla.
 - d) Calcular $P(X > 0)$ y $P(-1 < X \leq 3)$.
 - e) Calcular la esperanza y varianza de X .
2. Sea X la v.a. que representa el número de caras obtenidas en cuatro lanzamientos de una moneda equilibrada.
 - a) Obtener y dibujar la función de probabilidad de X .
 - b) Obtener y dibujar la función de probabilidad de la nueva v.a. $Y = 1/(1 + X)$.
3. Sea X una v.a. con distribución uniforme discreta, es decir, $p_X(x) = 1/k$, para $x = 1, 2, \dots, k$. Demostrar que:
 - a) Su esperanza es $E(X) = (k + 1)/2$.
 - b) Su varianza es $Var(X) = (k^2 - 1)/12$.
 - c) Como aplicación, determinar la esperanza y varianza de la puntuación obtenida al lanzar un dado equilibrado.
4. Una unidad de mantenimiento sabe que cada falla reportada tiene probabilidad 0.15 de ser falsa alarma. Si la unidad acepta 25 solicitudes de mantenimiento por día y sólo dispone del tiempo para atender 20 fallas reales, determine: ¿Cuál es la probabilidad de que todas las fallas reales sean atendidas?
5. Se recibe un lote de 1000 artefactos, de los cuales 60 están dañados. Para decidir si aceptamos o no el lote se seleccionan 200 artefactos al azar, sin remplazo, rechazando el lote si más de 2 están dañados. Hallar la probabilidad de aceptar el lote.
6. La proporción de pastillas defectuosas producidas por una máquina es de 0.01.
 - a) Si las pastillas se empaquetan en tubos de 20 unidades, ¿cuál es la probabilidad de que un tubo tenga k pastillas defectuosas?

- b) Si los tubos se comercializan en cajas de 25 unidades, ¿cuál es la probabilidad de que una caja contenga exactamente 20 tubos sin ninguna pastilla defectuosa?
7. Un determinado tipo de motor de avión tiene probabilidad p de fallar a lo largo de un viaje. ¿Qué es más seguro, viajar en un avión bimotor o en un cuatrimotor, si cada uno de estos aviones puede volar con la mitad de sus motores?
8. Un estanque contiene 500 peces de los cuales 300 están marcados. Un pescador logra sacar 50 peces. Hallar la probabilidad de que:
- a) 20 de los peces estén marcados,
b) ninguno de los peces esté marcado.
9. Un depósito guarda 1000 artículos, 100 de los cuales son defectuosos. Un inspector toma uno de los artículos al azar, y si no es defectuoso lo devuelve al lote. Sea N el número de inspecciones de objetos no defectuosos, que se realizan antes de encontrar el primer objeto defectuoso. Calcular la probabilidad de tener $25 \leq N \leq 60$.
10. En un colegio de Artes están matriculados 300 hombres y 700 mujeres. Se eligen 25 estudiantes al azar, hallar la probabilidad de que 15 ó más de los elegidos sean mujeres si el muestreo se hace (a) con reemplazo y (b) sin reemplazo.
11. Se lanza una moneda 8 veces, hallar la probabilidad de que:
- a) se obtengan exactamente 5 caras,
b) se obtengan a lo sumo 4 cruces.
12. Un lector óptico falla en la lectura del código de barras, con una probabilidad de 0.01.
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que el lector falle solo una vez en las primeras 10 lecturas?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el lector no falle en las primeras 20 lecturas dado que en las primeras 10 lecturas, el lector no falló.
13. Considerar una moneda equilibrada. Determinar
- a) Probabilidad de que en 10 lanzamientos se obtengan 6 caras
b) Probabilidad de que salgan 3 cruces antes de conseguir la primera cara
c) Probabilidad de que sean necesarios 12 lanzamientos para obtener la cuarta cara
14. La probabilidad de fallo de cierto aparato eléctrico en cualquier período de una hora es de 0.02. ¿Cuál es la probabilidad de que este aparato funcione bien durante dos horas seguidas?
15. Una urna contiene una bola roja y tres bolas blancas. Si se realizan las extracciones con remplazo, determinar la probabilidad de que sean necesarias, como mínimo, 4 extracciones para obtener la primera bola roja.
16. En una copistería hay 10 fotocopiadoras de las cuales 4 hacen fotocopias en color. Si en un momento dado hay 5 fotocopiadoras libres, determinan:
- a) La probabilidad de que las cuatro fotocopiadoras en color estén libres.
b) La probabilidad de que, como mínimo, haya una fotocopiadora en color libre.

17. El número de erratas por página en un libro se supone que sigue una distribución de Poisson. En una muestra de 95 páginas se han observado las siguientes frecuencias:

# erratas	0	1	2	3	4	5
frecuencia	40	30	15	7	2	1

Estime el parámetro λ de la distribución, y hallar la probabilidad de que en una página al azar haya al menos una errata.

18. De una baraja española de 40 cartas se extraen 3 al azar. Calcular la probabilidad de obtener 2 copas si las extracciones se realizan

- a) Sin remplazamiento
- b) Con remplazamiento

19. Calcular e interpretar el valor esperado de X cuando tiene distribución:

- binomial de parámetros n y p
- geométrica de parámetro p
- hipergeométrica
- Poisson de parámetro λ

20. Calcular la varianza de X cuando tiene distribución:

- binomial de parámetros n y p
- geométrica de parámetro p
- Poisson de parámetro λ

21. Si X se distribuye Poisson de parámetro λ , probar que

$$E[X(X-1)(X-2)\dots(X-k)] = \lambda^{k+1}$$

22. Si X tiene distribución geométrica, pruebe la propiedad de pérdida de memoria

$$P(X > m+n | X > m) = P(X > n)$$

23. Sea N una v.a. con valores enteros no negativos. Verificar que

$$E[N] = \sum_{k \geq 0} P(N > k) \tag{1}$$

24. Un dado tiene dos cara azules, dos rojas y dos verdes. Se lanza repetidamente. Encuentre la probabilidad de que no todos los colores aparezcan en los primeros k lanzamientos. Deduzca que si N es la v.a. que toma el valor n si el tercer color aparece en el n -ésimo lanzamiento por primera vez, entonces $E[N] = 11/2$. Sugerencia, use la fórmula (1) y la fórmula de inclusión exclusión para la unión de tres eventos.

25. Sea N el número de lanzamientos de una moneda necesarios para que se repita el resultado del primer lanzamiento. Condicionando en el primer lanzamiento, calcular $E[N]$.

26. La función generatriz de probabilidades de una variable aleatoria discreta X está definida por la serie de potencias

$$g(s) = E[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(X = k), \quad |s| < 1.$$

Calcular la función generatriz de probabilidades de las distribuciones de Bernoulli, Binomial y Poisson.

27. Una línea de buses cubre la ruta MAD-BAR, con un bus que tiene 50 plazas. La línea aceptó 60 reservaciones para un viaje. Se supone que todos los pasajeros actúan en forma independiente y se estima que 1 de cada 10 pasajeros que hacen la reserva no se presentan. El precio del pasaje es 25, pero si un pasajero se presenta y no puede ser embarcado, se le reintegra su dinero más una compensación de 5.
- Calcule la esperanza del número de pasajeros que se presentan a abordar.
 - De una expresión para la esperanza del número de pasajeros que acuden y no pueden ser embarcados.
 - De una expresión para la ganancia esperada por la línea.
28. En una feria hay que pagar 2 euros para jugar al juego de la pica y las anillas. Este juego consiste en lanzar, desde cierta distancia, 3 anillas hacia una pica y ensartarlas. Se da un premio de 3 euros si el jugador solamente ensarta una anilla, 6 euros si el jugador ensarta dos de las tres anillas y 30 euros si consigue ensartarlas todas. Suponiendo que la probabilidad de ensartar una anilla es de 0.1, en cada lanzamiento, y que los lanzamientos son independientes, determinar la ganancia media esperada por jugada.
29. Se venden 5000 boletos de lotería a 1 euro cada uno, para el sorteo de un premio de 2000 euros. Determinar la ganancia media esperada de una persona que compra tres boletos de lotería.
30. El coste de producción en euros de cierta máquina que se fabrica por encargo es de 4300 por máquina, cuando se producen menos de cinco unidades. Si se producen de cinco a nueve unidades el coste por máquina baja a 4000. Y cuando se producen diez o más unidades el coste por unidad baja a 3500. La demanda de estas máquinas fluctúa según una distribución de Poisson con valor esperado igual a 8. Si el precio de venta unitario es de 5.000 euros, ¿cuál es la ganancia neta esperada por máquina? Si vendemos cada máquina a 3.888,20 euros, ¿cuál es la probabilidad de que la empresa pierda dinero?