Teoría Estadística Elemental I
Ejercicios del 1^{er} Tema

Aurea Grané y Raúl Jiménez
Universidad Carlos III de Madrid

Septiembre 2012

1. Sean A y B dos sucesos. Demostrar que:

   a) $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$,

   b) $P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$,

   c) $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

2. Supongamos que $\Omega = A \cup B$ y $P(A \cap B) = 0{,}2$.

   a) Sabiendo que $P(B) = 0{,}7$, calcule $P(B - A)$. Luego calcule $P(A^c)$,

   b) ¿Cuánto vale $P(A^c \cap B^c)$?

3. Supongamos que $\Omega = A \cup B \cup C$, con $P(A) = P(B) = P(C) = p$. Supongamos además que $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = q$ y $P(A \cap B \cap C) = z$. Expresar, en términos de p, q y z las siguientes probabilidades

   a) $P(A^c \cap B^c))$ y $P(A^c \cap B^c \cap C^c))$

   b) $P((A \cap B \cap C)^c)$

   c) $P(A \cap (B^c \cup C^c))$

4. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par en un lanzamiento de un dado trucado de forma que la probabilidad de cada una de las caras es proporcional al número de puntos que muestra dicha cara?

5. La siguiente tabla contiene las probabilidades correspondientes a las intersecciones de los eventos indicados:

	B	B^c
A	0.4	0.2
A^c	0.15	0.25

   a) Hallar $P(A \mid B)$

   b) Hallar $P(B \mid A)$

   c) Hallar $P(A^c \mid B)$

   d) Hallar $P(B^c \mid A)$

6. Verifique la fórmula de probabilidad total vista en clase.

7. Sean A, B y C tres sucesos tales que $A = (B \cap C)^c$ con $P(A) \neq 0$. Demostrar que:

$$P((B \cup C) \mid A) = P(B \mid A) + P(C \mid A).$$

8. La urna I contiene 12 bolas rojas y 6 blancas. La urna II contiene, inicialmente, una bola roja y una blanca. Se toma una bola al azar de la urna I y se pasa a la II, luego se extrae una bola al azar de la urna II y resulta ser blanca. ¿Cúal es la probabilidad de que la bola pasada de la urna I a la II haya sido blanca?

9. Una urna contiene 5 bolas blancas y 3 bolas rojas. Tres jugadores A, B y C extraen una bola, sin devolución, en este mismo orden. Gana el primer jugador que saque una bola blanca. Calcular la probabilidad de que gane C.

10. Verifique la fórmula de Bayes.

11. Un virus peligroso está presente en el1 % de la población nacional. Se tiene una prueba clínica para detectar la presencia del virus, y esta prueba es correcta en el 80 % de los casos (es decir, entre los portadores del virus, la prueba dá positivo el 80 % de las veces y entre los no portadores dá negativo el 80 % de las veces). Un individuo tomado al azar en la población es sometido a la prueba y el resultado de ésta es positivo. Al conocer el resultado de la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que este individuo sea realmente un portador del virus?. Comente sobre el valor de esta probabilidad.

12. Las llamadas telefónicas a una empresa son recibidas por tres recepcionistas: A, B y C. De las 200 llamadas recibidas en un día 60 son atendidas por la recepcionista A, 80 por B y las restantes por C. La recepcionista A se equivoca al pasar la llamada en un 2 % de las veces, la recepcionista B en un 5 % y la C en un 3 %.

    a) Hallar la probabilidad de que al pasar una llamada recibida en la empresa, ésta sea pasada al lugar equivocado.

    b) Si la llamada fue pasada al lugar equivocado, ¿cuál es la probabilidad de que el error lo haya cometido la recepcionista A?

13. Verifique la fórmula de multiplicación vista en clase para $n = 3$.

14. Considerar tres urnas con la siguiente composición: La urna I contiene 2 bolas blancas y 4 bolas rojas, la urna II contiene 8 bolas blancas y 4 rojas y la urna III contiene 1 bola blanca y 3 rojas. Sacamos una bola de cada urna y cuando las miramos observamos que dos son blancas y una es roja. Calcular la probabilidad de que la bola que se ha sacado de la urna II haya sido blanca.

15. Dé un ejemplo de dos eventos que sean disjuntos pero que no sean independientes y un ejemplo de dos eventos que sean independientes pero que no sean disjuntos.

16. Encontrar los errores de las siguientes afirmaciones y corregirlos.

    a) Dos sucesos A y B son independientes si $P(B - A) = P(B)$,

    b) Dos sucesos A y B son independientes si $A \cap B = \emptyset$,

    c) Dos sucesos A y B son disjuntos si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$,

    d) Si A y B son dos sucesos independientes con $P(A) = 1/2$ y $P(B) = 1/3$, entonces $P(A \cup B) = 5/6$.

17. Existen 2 caminos para ir desde A hasta B, y 2 caminos para ir de B a C. Cada uno de los caminos tiene probabilidad p de estar bloqueado, independientemente de los otros. Hallar la probabilidad de que haya:

    a) Al menos un camino abierto desde A hasta C. (Sugerencia: pruebe que la probabilidad de que esté abierto al menos un camino entre A y B es $1 - p^2$, la misma de que esté abierto al menos uno entre B y C).

    b) Un camino abierto de A a B, dado que no hay camino de A a C.

18. Una única carta es eliminada, al azar, de una baraja de cartas españolas. De las restantes, se seleccionan dos al azar y resultan ambas espadas. ¿Cuál es la probabilidad de que la carta eliminada haya sido también una espada?

19. Se tienen 6 barajas de poker, cada baraja está ordenada al azar. Se lanza un dado y luego se selecciona una carta de cada baraja, tantas cartas como el dado indique. Por ejemplo, si el dado muestra el número 3, pues se seleccionan 3 cartas.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 5 ases?

    b) Si se obtuvieron 5 ases, ¿con que probabilidad el resultado de lanzar el dado fue también 5?

20. Un sombrero contiene 20 papeletas blancas numeradas del 1 al 20, 10 papeletas rojas numeradas del 1 al 10, 40 papeletas amarillas numeradas del 1 al 40 y 10 papeletas azules numeradas del 1 al 10. Si estas papeletas se mezclan bien de manera que cada una de ellas tiene la misma probabilidad de salir, calcular las probabilidades de sacar una papeleta que sea:

    a) azul o blanca,

    b) numerada 1,2,3,4, ó 5,

    c) roja o amarilla, pero numerada 1,2,3,4,

    d) numerada 5, 15, 25 ó 35,

    e) blanca y con un número mayor que 12 o bien amarilla y con un número mayor que 26.

21. Una urna contiene inicialmente r bolas rojas y b blancas. Se extraen 5 bolas, una por una, al azar, sin remplazo.

    a) Hallar la probabilidad de que la secuencia sea RBRBR (Primera Roja, Segunda Blanca,...).

    b) Hallar la probabilidad de que la secuencia sea RRRBB. Compare con (a). Generalize.

    c) Ahora se extraen al azar, una por una y sin remplazo, todas las bolas de la urna. Diga porque todas las secuencias de extracción tienen la misma probabilidad.

    d) ¿Cuál es la probabilidad de que la última bola extraída sea roja?

22. Se lanza un dado y luego se lanza una moneda el número de veces que muestre el dado.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 5 caras?

    b) Si se obtuvieron 5 caras, ¿con que probabilidad el resultado de lanzar el dado fue también 5?

23. Los jurados A y B están ambos formados por tres jueces. Para pronunciar sentencia, cada jurado utiliza el sistema mayoritario de votos. Supongamos que en el jurado A, los dos primeros jueces toman *la decisión justa* con probabilidad p cada uno de ellos y de forma independiente uno de otro; el tercer juez lanza una moneda simétrica para tomar su decisión. En el jurado B, los dos primeros jueces hacen lo mismo que en A, pero el tercer juez hace lo siguiente: si los dos primeros jueces coinciden en sus sentencias, éste se suma a la misma opinión, pero si los dos primeros jueces divergen, el tercer juez lanza una moneda simétrica para pronunciarse. ¿Cuál de los dos jurados es más justo? Razonar la respuesta.

24. Se sientan 4 personas, al azar, en 4 sillas que llevan sus nombres (una silla con cada nombre). ¿Qué probabilidad hay de que alguna de las personas quede en la silla con su nombre?

25. Si n personas se sientan al azar en una fila de 2n asientos, halle la probabilidad de que no queden 2 personas en sillas contiguas.

26. Se recibe un lote de 1000 artefactos, de los cuales 60 están dañados. Para decidir si aceptamos o no el lote se seleccionan 200 artefactos al azar, sin remplazo, rechazando el lote si más de 2 están dañados. Hallar la probabilidad de aceptar el lote.

27. En un colegio de Artes están matriculados 300 hombres y 700 mujeres. Se eligen 25 estudiantes al azar, hallar la probabilidad de que 15 ó más de los elegidos sean mujeres si el muestreo se hace (a) con reemplazo y (b) sin reemplazo.