1 Introducción

En general, los fenómenos que observamos tienen variaciones que no controlamos perfectamente. Si tenemos que tomar una decisión basada en los datos, esta decisión tendrá riesgos que dependen esencialmente de esta variabilidad. El objetivo de la estadística es describir y evaluar estos riesgos.

1.1 Ejemplo 1 (dopaje)

Cuando un atleta toma medicamentos para mejorar su capacidad muscular, aumenta su producción de hormonas. Una de esas hormonas es la Creatine Kinase y denotaremos X la concentración de esta hormona en la sangre de un atleta.

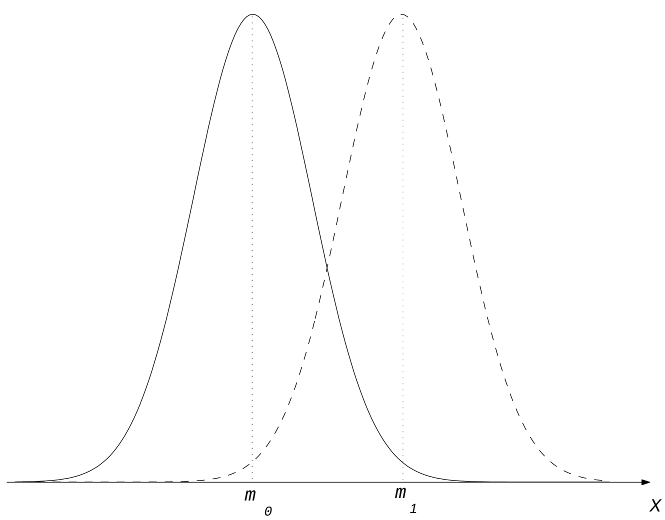

FIG. 1 – *Distribuciones de X bajo las hipótesis H_0 : "El atleta no se ha dopado" y H_1 : "El atleta se ha dopado"*

Sabemos que:

- La variable X sigue una distribución normal $N(m_0,\sigma^2)$ cuando el atleta no se ha dopado (la varianza σ^2 representa aquí la variabilidad entre los individuos).
- Si el atleta se ha dopado, X sigue una normal $N(m_1,\sigma^2)$ pero con $m_1 > m_0$.
- Suponemos aquí que m_0,m_1 y σ^2 son conocidos.

¿Como decidir entre ambas hipótesis?

- Vamos a decidir que el atleta se ha dopado si observamos

$$X > u$$

¿Comó fijar el umbral u?

- Supongamos que la hipótesis H_0 :"El atleta no se ha dopado" es cierta.

- Si observamos que $X > u$, concluimos sin embargo que H_1 :“El atleta se ha dopado”.
- Nos podemos equivocar porque hay una proporción α de atletas “sanos” que tienen una concentración $X > u$!

Definición 1 *La probabilidad α es el riesgo de equivocarse cuando se rechaza H_0 (o error de tipo I). Este riesgo depende solamente de la distribución bajo H_0 y del umbral u.*

- Pero existe otro riesgo asociado a nuestra regla de decisión. Porque existe una proporción β de atletas dopados cuya concentración $X < u$. Esta probabilidad corresponde al riesgo de decidir que el atleta no se ha dopado cuando en realidad se ha dopado.

Definición 2 *La probabilidad β es el riesgo de equivocarse cuando se acepta H_0 (o error de tipo II). Este riesgo sólo depende de la distribución bajo H_1 y del umbral u.*

¿Existe un umbral u ideal?

- Lo ideal sería elegir u de modo que α y β sean pequeños. Sin embargo,
  - si u es grande, entonces α será pequeño y β grande.
  - en cambio, si u es pequeño, entonces α será grande y β pequeño.

El problema consiste más bien en fijar los riesgos

- Los riesgos α y β son de naturaleza diferente.
  - Si el riego α es grande vamos a penalizar muchos inocentes.
  - Si β es grande nuestro control sera poco eficiente para luchar en contra del ”dopaje”.

Fijamos $\alpha = 5\%$, α es el riesgo que queremos controlar.

- Podemos entonces calcular el umbral u_α que se define por

$$\mathbf{P}\left(X > u_\alpha \middle| H_0\right) = \alpha$$

- Para calcular u_α, tipificamos la variable X y obtenemos

$$\mathbf{P}\left(Z > \frac{u_\alpha - m_0}{\sigma}\right) = \alpha,$$

donde Z sigue una normal estándar.

- Deducimos que

$$u_\alpha = m_0 + z_\alpha \sigma$$

donde $z_{5\%} = 1.64$.

- Una vez que tenemos el umbral, podemos calcular β que viene dado por

$$\beta = \mathbf{P}\left(X < u_\alpha | H_1\right)$$

– Tipificando X, obtenemos

$$\beta = \mathbf{P}\left(Z < \frac{m_0 - m_1}{\sigma} + z_\alpha\right)$$

Por lo tanto β será pequeño si el ratio $|m_0 - m_1| / \sigma$ es grande.
Si $m_0 = 10$, $m_1 = 13$ y $\sigma = 1$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \beta &= \mathbf{P}\left(Z < -1.36\right) \\ &= 8.7\% \end{aligned}$$

1.2 Ejemplo 2 (fiabilidad)

– Una máquina produce botellas y está ajustada de manera que las botellas midan $l_0 = 20$ cm de altura.
– La máquina no es perfecta y ciertas botellas pueden tener una altura mayor o menor que l_0.
– El fabricante conoce el margen de error de su máquina y lo tolera.
– Se observó que cuando "la máquina está bien ajustada", la distribución de la altura (X) de las botellas sigue una normal $N(l_0,\sigma^2)$ con varianza conocida σ^2 (varianza debida a la imperfección de la máquina).
– El fabricante sabe también que su máquina se puede desajustar y eso no lo puede tolerar.
– Para comprobar que su máquina está bien ajustada, el fabricante extrae diariamente de la producción una botella elegida al azar. Si su altura es "demasiado grande" o "demasiado pequeña para atribuirse a la imperfección de la máquina, entonces se detiene la producción para que se ajuste la máquina.

Problema: Controlar los riesgos de este procedimiento.

Consideramos las hipótesis

$$H_0 : \text{"La máquina está bien ajustada."}$$

frente a

$$H_1 : \text{"La máquina está desajustada."}$$

– El fabricante desea que el riesgo (o probabilidad) de "falsa alarma" no sea mayor que 0.05.
– La decisión del fabricante se formula de la manera siguiente: Rechazar H_0 si $|X - l_0| > u$.

¿Como elegir u tal que $\alpha = P\left(\text{Rechazar } H_0 \,|H_0 \text{ es cierto}\right) \leq 5\%$?

Caso ideal: La máquina es perfecta ($\sigma^2 = 0$). En este caso si $X \neq l_0$, entonces la máquina está desajustada. Si $u = 0$, nuestra decisión no tiene ningún riesgo.

Caso real: La máquina es imperfecta ($\sigma^2 > 0$). En este caso nuestra decisión tiene riesgos puesto que no controlamos las variaciones de X. Sabemos que bajo H_0, X sigue una normal $N(l_0,\sigma^2)$, por tanto,

$$\begin{aligned}
\alpha &= P_{H_0}(\text{Rechazar } H_0) \\
&= P_{H_0}(|X - l_0| > u) \\
&= 1 - P_{H_0}\left(-\frac{u}{\sigma} < \frac{X - l_0}{\sigma} < \frac{u}{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

Donde $Z = \frac{X-l_0}{\sigma}$ sigue una normal $N(0{,}1)$.
Consultando la tablas de la $N(0{,}1)$,obtenemos que

$$P_{H_0}\left(-1.96 < \frac{X - l_0}{\sigma} < 1.96\right) = 95\%.$$

Por tanto deducimos que si $u/\sigma \geq 1.96$, o sea $u \geq 1.96\sigma$, entonces $\alpha \leq 5\%$.

- Ahora nos interesamos al riesgo (o error) de tipo II β: el riesgo de no descartar H_0 siendo falsa, o sea, no dar la alarma cuando la máquina está desajustada! Suponemos que cuando H_1 es cierto, X sigue una normal $N(l_1,\sigma^2)$ con $l_1 \neq l_0$ (la máquina esta ajustada sobre el valor l_1). Se puede comprobar que cuanto más grande sea el desajuste de la máquina, más pequeño será β :

$$\begin{aligned}
\beta &= P_{H_1}(\text{Acceptar } H_0) \\
&= P_{H_1}(|X - l_0| < u) \\
&= P_{H_1}\left(-\frac{u}{\sigma} < \frac{X - l_1}{\sigma} - \frac{l_1 - l_0}{\sigma} < \frac{u}{\sigma}\right) \\
&= P_{H_1}(-1.96 + d < Z < 1.96 + d)
\end{aligned}$$

  donde $d = \frac{l_1-l_0}{\sigma}$ y $Z = \frac{X-l_1}{\sigma}$ es una $N(0{,}1)$ bajo H_1.
- El fabricante decide sacar varias botellas de la producción para mejorar el control de su máquina: Sean X_1,X_2,....., X_n, las alturas de las botellas de la muestra. Bajo H_0, $(X_1,X_2,.....,X_n)$ es una muestra de la distribución $N(l_0,\sigma^2)$, por tanto la media $\overline{X}$ sigue una distribución $N\left(l_0,\frac{\sigma^2}{n}\right)$. Cuando n tiende hacia el infinito, la observación de $\overline{X}$ vuelve cada vez mas segura (la varianza de $\overline{X}$ tiende hacia 0). Por tanto una decisión basada sobre el estadístico $\overline{X}$ tendrá riesgos cada vez mas pequeños cuando n crece. En el caso limite $n = \infty$, la regla de decisión rechazar H_0 si $\overline{X} \neq l_0$ no tendrá riesgo.

1.3 Ejemplo 3: (Examen de septiembre 1999)

Se comprobó que la probabilidad de curarse la gripe en dos semanas sin tomar medicamentos es igual a $p_0 = 0.4$. Se experimenta un tratamiento homeopático sobre una muestra de N

pacientes recién afectados por la gripe. Suponemos que cada paciente tratado se cura de manera independiente y con la misma probabilidad p.

Problema: Se quiere construir un test para contrastar la capacidad curativa de este tratamiento.

- Traducir en función de p y p_0, el contraste de hipótesis H_0 :"El tratamiento no tiene efecto en la curación" frente a H_1 :"El tratamiento mejora la curación".
- Sea S_N el número de pacientes de la muestra que se cura al cabo de dos semanas. Construir un contraste a partir del estadístico S_N con riesgo I α.
- Interpretar el riesgo α que se quiere controlar en este experimento.

Solución:

- $H_0 : p = p_0$ frente a $H_1 : p > p_0$
- S_N sigue una distribución binomial $B(N,p)$. Intuitivamente, vamos a rechazar H_0 si observamos S_N grande. Eso se puede justificar mediante el calculo del valor esperado de S_N. Tenemos que
  $$E\left(S_N \,|H_1 \text{ es cierto}\right) = Np$$
  Por tanto
  $$E\left(S_N \,|H_1 \text{ es cierto}\right) = Np > Np_0 = E\left(S_N \,|H_0 \text{ es cierto}\right)$$
  Así que una regla de decisión para el contraste de hipótesis anterior puede ser
  $$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } S_N > u.$$
  Por consiguiente, el riesgo de tipo I α para esta decisión será
  $$\begin{aligned} \alpha &= P\left(S_N > u \,|H_0 \text{ es cierto}\right) \\ &= \sum_{k=[u]+1}^{N} C_N^k p_0^k (1-p_0)^{N-k} \end{aligned}$$
- La probabilidad α representa aquí el riesgo de aceptar "un placebo como tratamiento contra la gripe."

Aplicación numérica : El experimento se hizo con una muestra de $N = 10$ pacientes, y se observó $S_{10} = 6$.¿ Cual sera la decisión basada sobre el precedente contraste y nuestra observación, para $\alpha = 5\%$ y para $\alpha = 7\%$?

La tabla que aparece a continuación da las probabilidades de la binomial $B(10{,}0.4)$:

k	$P_{H_0}(S_{10}=k)$
0	0.006
1	0.040
2	0.121
3	0.215
4	0.251
5	0.201
6	0.111
7	0.042
8	0.010
9	0.002
10	0.001

Según esta tabla $P_{H_0}(S_{10} > 7) = 0.013$ y $P_{H_0}(S_{10} > 6) = 0.055$. Entonces no podemos obtener un riesgo α igual a 5% a partir de la regla de decisión anterior: La ecuación $\alpha = P\left(S_N > u \,|H_0 \text{ es cierto}\right)$ no tiene una solución u_α para cualquier $\alpha \in [0{,}1]$. Eso es debido al hecho de que el estadístico S_{10} tome valores discretos. Para solucionar este problema proponemos una decisión mas flexible (decisión aleatorizada):

$$\text{Rechazamos } H_0 \text{ con probabilidad} \begin{cases} 1 \text{ si } S_N > u \\ \gamma \text{ si } S_N = u \\ 0 \text{ si } S_N < u \end{cases} .$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha &= P_{H_0}\left(\text{Rechazar } H_0\right) \\ &= P_{H_0}\left(S_N > u\right) + \gamma P_{H_0}\left(S_N = u\right). \end{aligned}$$

Para $\alpha = 0.05$, $u = 7$, y por tanto

$$\begin{aligned} \gamma &= \left(0.05 - P(S_{10} > 7)\right)/P(S_{10} = 7) \\ &= \left(0.05 - 0.013\right)/0.042 \\ &= 0.88. \end{aligned}$$

Así que nuestra regla de decisión para un riesgo I $\alpha = 5\%$ será

$$\text{Rechazamos } H_0 \text{ con probabilidad} \begin{cases} 1 \text{ si } S_{10} > 7 \\ 0.88 \text{ si } S_{10} = 7 \\ 0 \text{ si } S_{10} < 7 \end{cases} .$$

Observamos $S_{10} = 6$, entonces aceptamos H_0.

Para $\alpha = 7\%$, la regla de decisión sera

$$\text{Rechazamos } H_0 \text{ con probabilidad} \begin{cases} 1 \text{ si } S_{10} > 6 \\ 0.135 \text{ si } S_{10} = 6 \\ 0 \text{ si } S_{10} < 6 \end{cases} .$$

Observamos $S_{10} = 6$, por tanto rechazamos H_0 con probabilidad 0.135.

1.4 Ejemplo 4 : (Test de la mediana)

Suponemos que observamos una muestra $X_1,X_2,\ldots,X_n$ de una distribución F_0 con densidad continua. Queremos contrastar la hipótesis H_0 :"La mediana de F_0 es igual a m_0".

(a) Deducir la distribución del estadístico

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{I}_{\{X_i \leq m_0\}}$$

(b) Construir un test basado en S_n para contrastar H_0.

(c) **Aplicación:** Se quiere estudiar la influencia de la vida en grupo en una guardería de niños. Disponemos de la tabla de datos siguientes, donde aparecen notas (entre 0 y 100) que pretenden medir la percepción del niño.

Notas para gemelos	
En la guardería	En Casa
82	63
69	42
73	74
43	37
58	51
56	43
76	80
65	62

Contrastar con un nivel $\alpha = 5\%$ la hipótesis H_0 :"Las percepciones en la guardería y en casa no son distintas"

Solución (breve):

(a) S_n es una suma de n variables de Bernouilli con parámetro $p = P(X_i \leq m_0)$. Por tanto, S_n sigue una binomial $B(n,p)$.

(b) Bajo H_0, $p = \frac{1}{2}$. Por tanto, rechazaremos H_0 si

$$\left| S_n - \frac{n}{2} \right| > u$$

(c) Sean (X_i,Y_i) las notas (en la guardería y en casa) de los i^{esimo} gemelos. Bajo $H_0 : P_{X,Y} = P_{Y,X}$, la variable $U_i = X_i - Y_i$ tiene una distribución F_0 simétrica, por tanto su mediana $m_0 = 0$.

1.5 Conclusión:

La construcción de un test para contrastar dos hipótesis H_0 y H_1 procede de la siguiente manera:

1. Formular el contraste (H_0 frente a H_1) en función de los parámetros de la distribución de las observaciones.
2. Elegir un estadístico S sobre lo cual basamos nuestra regla de decisión.

3. Definir cuando rechazamos H_0 y fijar el riesgo I, α.
4. Calcular el umbral de rechazo de la regla de decisión, en función de α.

Los riesgos del test para contrastar dos hipótesis H_0 y H_1 dependen de :

– La dispersión del estadístico S sobre el cual basamos nuestra decisión (el riesgo crece con la variabilidad de nuestra observación).
– La "distancia" entre las dos hipótesis; si H_0 y H_1 están "cerca", tomar una decisión que pretende distinguir estas dos hipótesis suele ser arriesgado.

2 Optimalidad de los tests

2.1 Contraste de dos hipótesis simples

Denotamos P_θ la distribución teórica de la muestra de observaciones. Queremos saber si la distribución con la que hemos obtenido la muestra es P_{θ_0} o P_{θ_1}.

$$\boxed{H_0 : \theta = \theta_0} \text{ frente a } \boxed{H_1 : \theta = \theta_1}$$

Las hipótesis H_0 (hipótesis nula) y H_1 (hipótesis alternativa) no tienen en general un papel simétrico. En "fiabilidad", H_0 es la hipótesis de "no alarma" y H_1 la de "alarma". En las ciencias, H_0 es la hipótesis comúnmente admitida y H_1 es una hipótesis que lleva a otra teoría. En general, H_0 corresponde a la hipótesis que no queremos rechazar fácilmente, y el riesgo de equivocarse rechazándola está fijado en la construcción del test.

– El riesgo de rechazar H_0, H_0 siendo cierta, será denotado α y será llamado **riesgo o error de tipo I**, denominado también **nivel de significación** del contraste. Eso es el riesgo del fabricante en fiabilidad (riesgo de equivocarse cuando da la alarma).
– El riesgo de equivocarnos cuando aceptamos H_0, lo denotamos β y se llama **riesgo (o error) de tipo II** (riesgo del cliente en fiabilidad).
– A continuación, damos la tabla de los riesgos para un contraste con dos hipótesis simples:

Decisión \ Realidad	H_0	H_1
H_0	$1-\alpha$	β
H_1	α	$1-\beta$

Definición 3 *Un test para contrastar H_0 frente a H_1 se define como una función ϕ de las observaciones que toma sus valores dentro del intervalo* [0,1].
A este test asociamos la regla de decisión "Rechazamos H_0 con una probabilidad igual a ϕ".

El riesgo α de ϕ se escribe :

$$\begin{aligned} \alpha &= P_{H_0}(\text{rechazar } H_0) \\ &= E_{H_0}(\phi) \end{aligned}$$

Ejemplo 1 *En el ejemplo del "Doping", $\phi = \mathbf{I}_{\{X>u\}}$ y $\alpha = E_{H_0}(\phi) = P_{H_0}(X > u)$.*

Para comparar los tests con mismo riesgo α, definimos un criterio que llamamos potencia del test que corresponde a la capacidad del test para rechazar H_0 cuando H_0 es falso. En el marco de un contraste con dos hipótesis simple, esta potencia corresponde al valor $1-\beta = E_{H_1}(\phi)$. Cuanto más pequeño sea β mejor será el test. El test óptimo se construye utilizando el siguiente lema..

Teorema 1 (Lema de Neyman-Pearson) *Sea $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ el conjunto de observaciones y $L_\theta(x)$ la verosimilitud de x. Para cualquier nivel $\alpha \in]0{,}1[$ podemos determinar el umbral u_α y la probabilidad γ_α de tal manera que el test*

$$\phi = \begin{cases} 1 \text{ si } L_{\theta_1}(x) > u_\alpha L_{\theta_0}(x) \\ \gamma_\alpha \text{ si } L_{\theta_1}(x) = u_\alpha L_{\theta_0}(x) \\ 0 \text{ si } L_{\theta_1}(x) < u_\alpha L_{\theta_0}(x) \end{cases},$$

tenga un riesgo de tipo I α. Este test tiene el riesgo de tipo II β mínimo en la clase de los tests con un riesgo I igual a α.

Comentario:(Test no aleatorizado)
Si la distribución P_θ admite una densidad continua, entonces el test de Neyman-Pearson se simplifica y tenemos que

$$\phi = \begin{cases} 1 \text{ si } L_{\theta_1}(x) > u_\alpha L_{\theta_0}(x) \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}.$$

2.2 Formulación general

Un contraste de hipótesis se formula de manera general como

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ frente a } H_1 : \theta \in \Theta_1.$$

En este marco general, tenemos la definición siguiente de la potencia y del nivel de un test ϕ.

Definición 4 *Sea la función β_ϕ definida sobre el espacio $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ y tal que $\beta_\phi(\theta) = E_\theta(\phi)$:probabilidad de rechazar H_0 para distintos valores de $\theta \in \Theta$.*
(a) La potencia de un test ϕ (capacidad de rechazar H_0, H_0 siendo falso) es la restricción de β_ϕ sobre Θ_1.
(b) El nivel del test denotado α será definido como el valor máximo de la función β_ϕ en el conjunto Θ_0 :

$$\alpha = \max_{\theta \in \Theta_0} \beta_\phi(\theta).$$

Definición 5 *La región critica del test, denotada C, es la región del espacio muestral por la cual rechazamos H_0 : $C = \{x,\, \phi(x) > 0\}$.*

Definición 6 *Sea un test ϕ, digamos que este test es UMP (uniformemente mas potente) si para cualquier test ϕ' de mismo nivel que ϕ, tenemos que la potencia de ϕ es superior a la de ϕ':*

$$\forall \theta \in \Theta_1,\ \beta_\phi(\theta) \geq \beta_{\phi'}(\theta).$$

Ejemplo 2 *Contraste sobre la media de una muestra gaussiana: Sea* $(X_i)_{i=1..n}$ *muestra de* $N(\theta,1)$.

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \textit{ frente a } H_1 : \theta > \theta_0$$

Proponemos el test

$$\phi = \begin{cases} 1 & si\ \overline{X} > \theta_0 + u \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

o sea, $\phi = \mathbf{I}_{\{\overline{X} > \theta_0 + u\}}$.
Para este test, tenemos que,

$$\begin{aligned} \beta_\phi(\theta) &= P_\theta\left(\overline{X} > \theta_0 + u\right) \\ &= P_\theta\left(\sqrt{n}\left(\overline{X} - \theta\right) > \sqrt{n}(\theta_0 - \theta) + \sqrt{n}u\right) \\ &= P\left(Z > \sqrt{n}(\theta_0 - \theta) + \sqrt{n}u\right). \end{aligned}$$

donde Z *sigue una normal standard.*

- La región critica de este test es $C =]\overline{X} > \theta_0 + u, +\infty[$.
- La función $\beta_\phi(\theta)$ es aquí creciente y por tanto $\alpha = \beta_\phi(\theta_0)$.
- Si $\alpha = 5\%$, el umbral debe verificar $\sqrt{n}u_\alpha = 1.64$.
- Entonces, si $\alpha = 5\%$, $\beta_\phi(\theta) = P\left(Z > \sqrt{n}(\theta_0 - \theta) + 1.64\right)$.
- Deducimos que la potencia del test crece con n.

2.3 Razón de verosimilitud monótona.

Objetivo: En este capitulo generalizamos el Lema de Neyman Pearson para contrastes unilaterales.

Definición 7 *Consideramos un modelo* $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ *donde* Θ *es una parte de* $\mathbb{R}$, *y denotamos* L_θ *la verosimilitud de las observaciones para el valor* θ *del parámetro. Supongamos, que existe un estadístico* $T \equiv T(x)$ *tal que, si* $\theta' > \theta$ *la razón de verosimilitud*

$$\ln\left[\frac{L_{\theta'}(x)}{L_\theta(x)}\right] = g\left(T\right),$$

donde $g(T)$ *es una función creciente de* T. *Entonces, el modelo* $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ *es de razón de verosimilitud creciente.*

Ejemplo 3 *Modelo de Poisson:* $P_\lambda(x) = \frac{1}{x!}\lambda^x e^{-\lambda}$, *con* $\lambda \in (0,\infty) = \Theta$. *Observamos una muestra* $(X_i)_{i=1..n}$ *de* P_λ.*El logaritmo de la razón de verosimilitud por* $\lambda' > \lambda$ *es*

$$\begin{aligned} \ln\left[\frac{L_{\lambda'}(x)}{L_\lambda(x)}\right] &= \ln\prod_{i=1}^n \frac{(\lambda')^{x_i}\exp(-\lambda')}{\lambda^{x_i}\exp(-\lambda)} \\ &= T\ \ln(\lambda'/\lambda) - (\lambda' - \lambda) = g_{\lambda,\lambda'}(T) \end{aligned}$$

donde $T = \sum_{i=1}^n X_i$ *y la función* $g_{\lambda,\lambda'}(T)$ *es creciente con respecto a* T. *Por tanto, el modelo de Poisson es de razón de verosimilitud creciente.*

Consideramos el contraste unilateral siguiente:

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \text{ frente } H_1 : \theta > \theta_0$$

Teorema 2 *Si el modelo $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ tiene una razón de verosimilitud creciente con la definición anterior, entonces*
(a) Para cada nivel α, existe un test UMP ϕ de nivel α para contrastar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ frente $H_1 : \theta > \theta_0$, que tiene la formaluación siguiente:

$$\phi = \begin{cases} 1 \text{ } si \text{ } T > u \\ \gamma \text{ } si \text{ } T = u \\ 0 \text{ } si \text{ } T < u \end{cases}$$

(b) La función de potencia $\beta(\theta)$ de este test es estrictamente creciente.
(c) Para cualquier test ϕ' con $E_{\theta_0}(\phi') = \alpha$, se cumple $E_\theta(\phi) \leq E_\theta(\phi')$ para $\theta \leq \theta_0$.
(d) Si ahora, queremos contrastar $H_0 : \theta \geq \theta_0$ frente $H_1 : \theta < \theta_0$, el test $1 - \phi$ es UMP en la clase de los tests de mismo nivel que $1 - \phi$.

3 Test de razón de verosimilitudes

Método basado en el estimador de máxima verosimilitud (EMV). Este método es aplicable en cualquier situación en la cual, la distribución P_θ de la muestra depende de un parámetro θ que varía en un espacio parametrico $\Theta \subset \mathbb{R}^q$.
Consideramos el contraste

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \text{ frente a } H_1 : \theta \in \Theta_1$$

y denotamos $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$.

Definición 8 *Se denomina razón de verosimilitudes para contrastar dichas hipótesis, al estadístico*

$$\begin{aligned} \Lambda(x) &= \frac{\max_{\theta\in\Theta} L_\theta(x)}{\max_{\theta\in\Theta_0} L_\theta(x)} \\ &= \frac{L_{\widehat{\theta}}(x)}{L_{\widehat{\theta}_0}(x)}, \end{aligned}$$

donde $L_\theta(x)$ es la verosimilitud de la muestra de observaciones $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\widehat{\theta}$ es el EMV de θ bajo cualquier hipótesis y $\widehat{\theta}_0$ el EMV de θ bajo H_0.
El test de razón de verosimilitudes se escribe

$$\phi = \begin{cases} 1 & si \ \Lambda(x) > u \\ \gamma & si \ \Lambda(x) = u \\ 0 & si \ \Lambda(x) < u \end{cases}$$

Su nivel es

$$\begin{aligned} \alpha &= \max_{\theta\in\Theta_0} E_\theta(\phi) \\ &= \max_{\theta\in\Theta_0} \left[P_\theta(\Lambda(x) > u) + \gamma P_\theta(\Lambda(x) = u)\right] \end{aligned}$$

Ejemplo 4 *El test de razón de verosimilitudes coincide con el test de Neyman-Pearson en el marco de dos hipótesis simples. Sea el contraste*

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 = \{\theta_0\} \text{ frente a } H_1 : \theta \in \Theta_1 = \{\theta_1\}$$

La razón de verosimilitudes para este contraste se escribe

$$\Lambda(x) = \frac{\max\left(L_{\theta_0}(x), L_{\theta_1}(x)\right)}{L_{\theta_0}(x)},$$

por tanto $\Lambda(x)$ *crece con el ratio* $\frac{L_{\theta_1}(x)}{L_{\theta_0}(x)}$. *Entonces rechazaremos* H_0 *si* $\frac{L_{\theta_1}(x)}{L_{\theta_0}(x)} > u$ *(test de Neyman-Pearson).*

Ejemplo 5 *Si observamos una muestra de una normal* $N(\mu,\sigma^2)$ *donde* μ *y* σ^2 *son desconocidos, y que queremos contrastar*

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 = \left\{\theta = (\mu,\sigma^2), \mu = \mu_0, \sigma > 0\right\}$$

frente a

$$H_1 : \theta \in \Theta_1 = \left\{\theta = (\mu,\sigma^2), \mu \neq \mu_0, \sigma > 0\right\}$$

entonces el EMV de θ *bajo cualquier hipótesis es* $\widehat{\theta} = \left(\overline{x}, \widehat{\sigma}^2\right)$, *donde* $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$ *y el EMV de* θ *bajo* H_0 *es* $\widehat{\theta}_0 = \left(\mu_0, \widehat{\sigma}_0^2\right)$ *donde* $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \mu_0\right)^2$. *Para este contraste, se demuestra que el test de razón de verosimilitudes coincide con el test de Student.*

En el caso en el cual no podemos expresar la regla de decisión mediante un estadístico cuya distribución conocemos, se puede utilizar la distribución asintótica del logaritmo de la razón de verosimilitudes que viene dada por el teorema siguiente.

Teorema 3 *Sobre una muestra* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *cuya verosimilitud* $L_\theta(x)$ *depende de un parámetro* $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^q$, *se quiere contrastar la hipótesis nula definida por*

$$H_0 : \theta \in \Theta_0$$

donde $\dim(\Theta_0) = k < q$. *Si la distribución del EMV de* θ *tiende hacia una normal (teorema central del limite) cuando* n *tiende hacia el infinito, entonces bajo* H_0, *el estadístico* $2\ln(\Lambda(x))$ *sigue asintoticamente una distribución del* χ^2 *con* $q-k$ *grados de libertad:*

$$2\ln(\Lambda(x)) \xrightarrow{d} \chi^2_{q-k}$$

Por tanto, un test basado en $2\ln(\Lambda(x))$ *con un nivel asintótico* α *será rechazar* H_0 *con probabilidad* 1 *si* $2\ln(\Lambda(x)) > \chi^2_{q-k,\alpha}$, *donde* $\chi^2_{q-k,\alpha}$ *es el cuantil definido por* $P\left(\chi^2_{q-k} > \chi^2_{q-k,\alpha}\right) = \alpha$.

Ejemplo 6 *Comparación de las medias de dos muestra de una distribución exponencial. Sea* $(X_i)_{i=1,\ldots,n_1}$ *una muestra de una distribución exponencial Exp*(λ_1) *y* $(Y_j)_{j=1,\ldots,n_2}$ *una muestra de una distribución exponencial Exp*(λ_2). *Se quiere contrastar la hipótesis* $H_0 : \lambda_1 = \lambda_2$. *Para este contraste se utiliza la distribución asintótica de* $2\ln(\Lambda(x))$ *(cuando* $n_1, n_2 \to \infty$*).*