

# Inferencia Estadística II

## Solución

Septiembre de 2004

**Problema 1** Denotamos  $X_1, X_2, \dots, X_n$  los gastos de la muestra de clientes de la primera operadora y  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  los gastos de la muestra de clientes de la segunda operadora, donde aquí  $n = 5$ . Dado que se supone que estas muestras tienen una distribución exponencial, la verosimilitud de estos datos será :

$$\begin{aligned} L(\lambda_1, \lambda_2) &= \prod_{i=1}^n \lambda_1 \exp(-\lambda_1 X_i) \prod_{j=1}^n \lambda_2 \exp(-\lambda_2 Y_j) \\ &= \lambda_1^n \exp\left(-\lambda_1 \sum X_i\right) \lambda_2^n \exp\left(-\lambda_2 \sum Y_j\right) \end{aligned}$$

donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son respectivamente los parámetros de la distribución exponencial de la primera y la segunda muestra. Por lo tanto, la hipótesis nula se puede también escribir  $H_0 : \lambda_1 = \lambda_2$ . Sabemos que bajo cualquier hipótesis, los estimadores máximo verosímiles de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{1}{\bar{X}} \text{ y } \hat{\lambda}_2 = \frac{1}{\bar{Y}}$$

Bajo  $H_0$ , las dos muestras siendo homogéneas, tenemos que  $\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2 = \hat{\lambda} = 1/\overline{X+Y}$  donde

$$\overline{X+Y} = \frac{1}{2n} \left( \sum X_i + \sum Y_j \right).$$

La razón de verosimilitudes se define por

$$\Lambda(x, y) = \frac{L(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2)}{L(\hat{\lambda}, \hat{\lambda})}$$

Substituyendo los estimadores de los parámetros por su expresión en  $\Lambda(x, y)$  y simplificando se obtiene que

$$\Lambda(x, y) = \frac{(\overline{X+Y})^{2n}}{\bar{X}^n \bar{Y}^n} = \frac{0.83^{10}}{0.8^5 0.86^5} = 1.007$$

Sabemos que la distribución asintótica de  $2 \ln \Lambda(x, y)$  es una  $\chi^2$  con  $q - k$ , donde  $q$  y  $k$  son respectivamente la dimensión del vector de parámetros bajo cualquier hipótesis y bajo  $H_0$ , aquí  $q = 2$  y  $k = 1$ . Puesto, que el cuantil 5% de la  $\chi^2$  con 1 grado de libertad tiene el valor  $\chi_{1,5\%}^2 = 3.841$ , y  $2 \ln \Lambda(x, y) \simeq 0$  aceptamos a la vista de estos datos la hipótesis nula.

**Problema II (3 puntos).**

1. Los datos se ajustan bastante bien a una recta.

2. El coeficiente de correlación de Pearson es aquí igual a :

$$r(x, y) = 0.953$$

Sabemos que bajo normalidad de los datos, el estadístico

$$T = \sqrt{n-2} \frac{r(x, y)}{\sqrt{1-r^2(x, y)}}$$

sigue bajo  $H_0$  una Student con  $n-2$  grados de libertad,  $n$  siendo igual aquí a 10. Obtenemos que

$$T = \sqrt{8} \frac{0.953}{\sqrt{1-0.953^2}} = 8.89$$

Puesto que este valor es (en valor absoluto) superior al cuantil  $t_{8,2.5\%} = 2.306$ , rechazamos la hipótesis nula.

3. Si no asumimos la normalidad de los datos, no conocemos en general la distribución de  $T$ . Por lo tanto, tenemos que recurrir a un coeficiente no paramétrico como el de Spearman  $r_s$ . Con estos datos obtenemos que

$$\begin{aligned} r_s &= 1 - \frac{6}{10(10^2-1)} 8 \\ &= 0.951 \end{aligned}$$

Dado que el cuantil 5% de la distribución de  $|r_s|$  bajo  $H_0$  es 0.648, rechazamos  $H_0$  también con este coeficiente.

### Problema III (3 puntos).

1. Se trata de la practica de simulación realizada en clase titulada “test de la  $\chi^2$ ”. La hipótesis nula se traduce aquí por  $H_0 : p_j = p_j^0 = \frac{1}{9}$  donde  $p_j$  es la probabilidad de que una bomba caiga en la zona  $Z_j$ . El estadístico de test era

$$\begin{aligned} K_n &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \frac{N_j^2}{p_j^0} - n \\ &= \frac{1}{60} \sum_{j=1}^9 \frac{N_j^2}{\frac{1}{9}} - 60 \end{aligned}$$

donde  $N_j$  era el número observado de bombas que cayeron en la zona  $Z_j$ . Sabemos que este estadístico sigue asintóticamente una  $\chi^2$  con  $k-1 = 8$  grados de libertad. Por lo tanto rechazaremos  $H_0$  si  $K_n > \chi_{8,5\%}^2 = 15.51$ .

2. Para la configuración siguiente de los impactos

8	7	3
5	9	11
6	4	7

obtenemos que  $K_n = 7.5$ , por consiguiente no podemos rechazar la hipótesis nula para el nivel de significación  $\alpha = 5\%$ .