Inferencia Estadística II

Soluciones

Septiembre de 2003

Problema 1 (4 puntos)

1. El contraste expresado en función de λ y λ_0 se escribe
$$H_0 : \lambda \leq \lambda_0 \text{ frente a } H_1 : \lambda > \lambda_0$$
2. Sea X_i el grado de multiplicidad en el i-esimo embarazo. Puesto que bajo H_0, $\mathbf{E}(X_i) = 0.1$, el número esperado de múltiple en los 200 embarazos será bajo la nula
$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{200} X_i\right) = \sum_{i=1}^{200} \mathbf{E}(X_i) = 200 * 0.1 = 20$$
Por lo tanto, el número esperado de niños sera $200 + 20 = 220$.
3. Utilizando el apartado anterior, deducimos que un test sencillo para contrastar si el grado de multiplicidad ha aumentado o no, consiste en rechazar H_0 si
$$T = \sum_{i=1}^{200} X_i > u,$$
donde u es un umbral que se determina en función del nivel del test. Se utiliza la aproximación normal de la distribución de T para hallar u. Bajo H_0, la media y la varianza de T son igual a 20. Por lo tanto, tenemos que u verifica
$$\begin{aligned} 5\% &= \mathbf{P}\left(T > u | H_0\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{T-20}{\sqrt{20}} > \frac{u-20}{\sqrt{20}} \middle| H_0\right) \\ &\simeq \mathbf{P}\left(Z > \frac{u-20}{\sqrt{20}}\right) \end{aligned}$$

donde Z es una variable $N(0,1)$. Consultando la tabla de la normal estándar, obtenemos que $\mathbf{P}(Z > 1.64) = 5\%$. Por lo tanto, u verifica $\frac{u-20}{\sqrt{20}} = 1.64$, o sea $u = 20 + 1.64\sqrt{20} = 27.33$. Observamos que $T = 40$ múltiples por lo tanto, rechazamos H_0.

4. El test UMP coincide con el test anterior, puesto que el modelo de Poisson tiene una razón de verosimilitudes creciente con respecto al estadístico T (ver apuntes de clase).

Problema II (3 puntos).

1. Se obtiene que el estadístico de Lilliefors $\Delta_{12}^* = 0.1788$ (la media y la varianza muestral siendo $\overline{X} = 10.31$ y $S^2 = 8.11$). Aceptamos H_0 (con nivel 5%) puesto que $\Delta_{12}^* \leq \Delta_{12,5\%}^* = 0.242$.
2. Bajo normalidad de los datos, se puede utilizar el test de Student. El estadístico de test será entonces

$$T = \frac{\overline{X} - m_0}{\sqrt{S^2}},$$

$m_0 = 10$ siendo la media bajo H_0. Se rechaza H_0, si $|T| > u$. Puesto que T, sigue una Student con 11 grados de libertad, deducimos que para un nivel 5%, el umbral $u = t_{11,2.5\%} = 2.201$. Observamos que $T = (10.31 - 10)/2.84 = 0.11$, por lo tanto, aceptamos H_0.

El método de razón de máxima verosimilitud es equivalente a este test (ver apuntes de clase).

Problema III (4 puntos).

1. Las perdidas son nulas si el número de reservas no canceladas es igual al número de habitaciones, o sea $d(1-\theta) = 500$. Si $\theta = 20\%$, el número idóneo de reservas será $d = 625$.
2. Como ya dicho en el apartado anterior $C = d(1-\theta)$ corresponde al número de reservas no canceladas. La función de perdidas $w(d,\theta)$ expresa que

   (a) Si $C > 500$ (el número de clientes con reserva que acudán al hotel supera al número de habitaciones) entonces el hotel tendrá unas perdidas proporcional al número de clientes que sobran.

   (b) Si $C = 500$ (el número de clientes con reserva que acudán al hotel es igual al número de habitaciones) entonces no hay perdidas

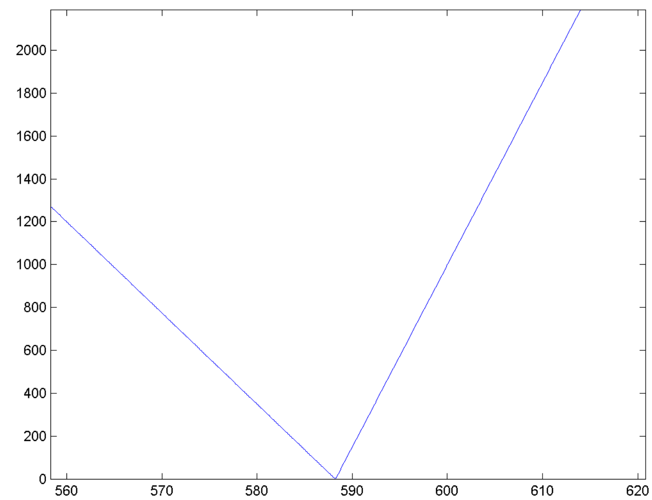

FIG. 1 – *Representación gráfica de* $\overline{w}_Q(d)$ *alrededor de su mínimo*

(c) Si $C < 500$ (hay habitaciones que se quedarán vacías) entonces el hotel tendrá unas perdidas proporcional al número habitaciones vacías.

3. En el gráfico se representa la función $\overline{w}_Q(d)$ alrededor de su valor mínimo, o sea, cuando $C = d(1 - 0.15)$ es proximo a 500. La ecuación $C = 500$, nos da $d = 588.24$. Pero, puesto que d (número de reservas) debe ser un valor entero, tenemos que elegir si $d = 588$ o $d = 589$. Tenemos que $\overline{w}_Q(588) = w(588{,}0.15) \simeq 50$ y $\overline{w}_Q(589) = w(589{,}0.15) \simeq 100$. Por lo tanto, el número de reservas idóneo es, en este caso, $d_Q = 588$.