Solución del Examen

Dr. Olivier Nuñez Boyer

Junio del 2001

Problema 1.

1. Denotamos $p_j^0 = P(X = j)$, $j = 0, 1, \ldots, 7$, donde X sigue una binomial $B(7; \frac{1}{2})$ y N_j es el número de días en los cuales se observó $(X = j)$. Para contrastar H_0, se utiliza el estadístico de Pearson :

$$K_n = n \sum_{j=0}^{7} \frac{\left(\frac{N_j}{n} - p_j^0\right)^2}{p_j^0},$$

donde $n = 250$. Utilizando la tabla de la binomial se obtiene $K_{250} \simeq 79.31$ que comparamos con el cuantil $\chi^2_{8-1,5\%} = 14.07$ puesto que aquí tenemos 8 categorías. Tenemos que $K_{250} > \chi^2_{8-1,5\%}$ por tanto rechazamos H_0 con un nivel asintótico $\alpha = 5\%$.

   (a) Si X_i es el número de retrasos observado el i^{esimo} día, tenemos que la verosimilitud del conjunto de observaciones diarias será

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} 7 \\ X_i \end{pmatrix} \theta^{X_i} (1-\theta)^{7-X_i} \\ &= C\theta^{\sum_{i=1}^{n} X_i} (1-\theta)^{7n - \sum_{i=1}^{n} X_i}, \end{aligned}$$

donde C es una constante que no depende de θ. Por tanto la log-verosimilitud será

$$\begin{aligned} l(\theta) &= \ln\left(L(\theta)\right) \\ &= \ln C + \ln(\theta) \sum_{i=1}^{n} X_i + \ln\left(1-\theta\right)\left(7n - \sum_{i=1}^{n} X_i\right). \end{aligned}$$

Se obtiene que la ecuación $l'(\widehat{\theta}) = 0$ es equivalente a

$$(1-\widehat{\theta})\sum_{i=1}^{n} X_i = \widehat{\theta}\left(7n - \sum_{i=1}^{n} X_i\right),$$

o sea $\widehat{\theta} = \frac{1}{7n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

(b) Obtenemos $\widehat{\theta} = \frac{1}{7\times 250}(0\times 7 + \ldots + 7\times 2) \simeq 0.4$. Si denotamos $\widehat{p}_j = P(X=j)$ donde X sigue una binomial $B(7;\widehat{\theta})$, el estadístico del χ^2 para contrastar la hipótesis H_0 múltiple será:

$$K_n^* = n\sum_{j=0}^{7}\frac{\left(\frac{N_j}{n} - \widehat{p}_j\right)^2}{\widehat{p}_j} \simeq 6.21.$$

Puesto que el cuantil $\chi^2_{8-1-1,5\%} = 12.59$ es superior a K_n^* aceptamos H_0 con un nivel asintótico $\alpha = 5\%$.

Problema II.

1. El estimador máximo verosímil de σ^2 basado en una muestra de N observaciones $(Z_1,\ldots,Z_N)$ de una normal $N(\mu,\sigma^2)$ donde μ es conocido es

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(Z_i-\mu)^2.$$

Por tanto bajo cualquier hipótesis, tenemos que $\widehat{\sigma}^2_A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2$, $\widehat{\sigma}^2_B = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(Y_j-1)^2$
y bajo $H_0 : \sigma^2_A = \sigma^2_B = \sigma^2_0$, tenemos que $\widehat{\sigma}^2_0 = \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2 + \sum_{j=1}^{m}(Y_j-1)^2\right)$.

2. La razón de verosimilitud se escribe

$$\begin{aligned}\Lambda(x,y) &= \frac{\max_{H_0\cup H_1} L(\sigma^2_A,\sigma^2_B)}{\max_{H_0} L(\sigma^2_A,\sigma^2_B)},\\ &= \frac{L(\widehat{\sigma}^2_A,\widehat{\sigma}^2_B)}{L(\widehat{\sigma}^2_0,\widehat{\sigma}^2_0)}\end{aligned}$$

donde

$$L(\sigma^2_A,\sigma^2_B) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2_A)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2_A}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2\right)\frac{1}{(2\pi\sigma^2_B)^{\frac{m}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2_B}\sum_{i=1}^{m}(Y_j-1)^2\right)$$

es la verosimilitud de las observaciones. Se obtiene que

$$\Lambda(x,y) = \frac{\left(\widehat{\sigma}_0^2\right)^{\frac{n+m}{2}}}{\left(\widehat{\sigma}_A^2\right)^{\frac{n}{2}}\left(\widehat{\sigma}_B^2\right)^{\frac{m}{2}}}.$$

Por tanto $2\ln\Lambda(x,y) = (n+m)\ln\left(\widehat{\sigma}_0^2\right) - n\ln\left(\widehat{\sigma}_A^2\right) - m\ln\left(\widehat{\sigma}_B^2\right)$. Como bajo H_1 la dimensión del vector de parámetros (σ_A^2, σ_B^2) es 2 y bajo H_0 es 1, tenemos que aproximadamente $2\ln\Lambda(x,y)$ sigue un χ^2 con 1 grado de libertad. El test con nivel asintótico $\alpha = 5\%$ será :

$$\phi = \begin{cases} 1 \text{ si } (n+m)\ln\left(\widehat{\sigma}_0^2\right) - n\ln\left(\widehat{\sigma}_A^2\right) - m\ln\left(\widehat{\sigma}_B^2\right) > \chi^2_{1,5\%} \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

3. Se obtiene que $2\ln\Lambda(x,y) \simeq 2.05$ y $\chi^2_{1,5\%} = 3.841$ por tanto se acepta H_0.

Problema III.

1. Tenemos que $w(1,\theta) = \begin{cases} 0 \text{ si } \theta < 0 \\ \theta \text{ si } \theta \geq 0 \end{cases}$ y $w(0,\theta) = \begin{cases} -\theta \text{ si } \theta < 0 \\ 0 \text{ si } \theta \geq 0 \end{cases}$ por tanto $w(d,\theta)$ es siempre no negativa.

2.

$$\begin{aligned} \overline{w}_Q(d) &= E\left[w(d,\theta)\right] \\ &= dE(\theta) - E\left[\theta I_{\{\theta<0\}}\right] \\ &= d \times 0 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \theta I_{\{\theta<0\}} \, \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{\theta^2}{2}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Puesto que este riesgo no depende de d, cualquier decisión vale.

(a) Conociendo θ, la probabilidad de que el accionista venda su acción es $P\left(X = 1 \,|\theta\right) = \frac{1}{2+\theta}$. Por tanto, si $\theta > 0$ (el valor de la acción aumentara el día siguiente) la probabilidad de vender su acción será mas pequeña que si $\theta < 0$. La decisión de este accionista siendo sensata, esto justifica la decisión $d(X)$ que reproduce la de este accionista.

(b) Tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\theta}{2+\theta}d\theta &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{2+\theta-2}{2+\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[1-\frac{2}{2+\theta}\right]d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}d\theta-\int_{-1}^{1}\frac{1}{2+\theta}d\theta \\
&= 1-\left[\ln(2+\theta)\right]_{-1}^{1}=1-\ln(3)
\end{aligned}
$$

(c) Por definición del riesgo bayesiano de una decisión basado en una información muestral, tenemos que

$$
\begin{aligned}
W_Q\left(d(X)\right) &= E\left[w\left(d(X),\theta\right)\right] \\
&= E\left[d(X)\theta\right]-E\left[\theta I_{\{\theta<0\}}\right] \\
&= E\left[E\left(d(X)\theta\left|\theta\right.\right)\right]+\frac{1}{4} \\
&= E\left[P\left(d(X)=1\left|\theta\right.\right)\theta\right]+\frac{1}{4} \\
&= E\left[P\left(X=1\left|\theta\right.\right)\ \theta\right]+\frac{1}{4} \\
&= E\left[\frac{\theta}{2+\theta}\right]+\frac{1}{4}=1-\ln(3)+\frac{1}{4}<\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Deducimos que $W_Q\left(d(X)\right)<\overline{w}_Q(d)$. Por tanto, la decisión basada en la información muestral es mejor que cualquier decisión que se basa solamente en la distribución *a priori* de θ.