

Inferencia Estadística II

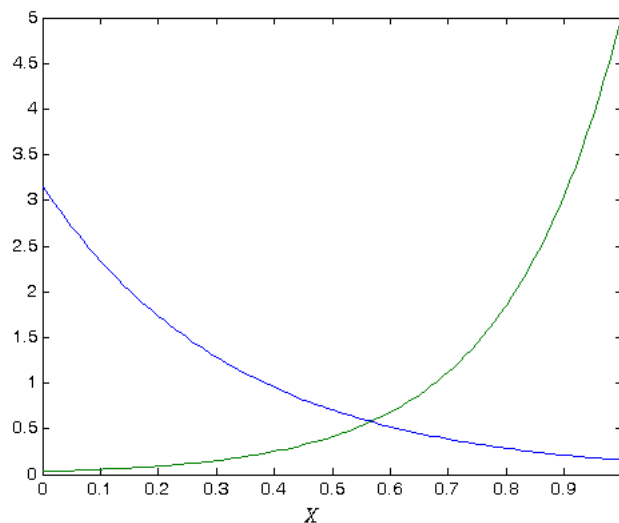
Septiembre de 2005

Problema I (3 puntos) Se quiere analizar estadísticamente la dependencia entre el nivel de renta (alto, medio, bajo) de un matrimonio y el número de hijos que tiene. La tabla que aparece a continuación recoge datos obtenidos a partir de una muestra de 180 matrimonios. Contrastar a partir de estos datos, la hipótesis H_0 : “El número de hijos que tiene un matrimonio es independiente de su nivel de renta” (nivel asintótico $\alpha = 5\%$).

Renta \ N° de hijos	N° de hijos				Total
	0	1	2	≥ 3	
Alto	25	12	9	5	51
Medio	13	21	17	10	61
Bajo	7	13	20	28	68
Total	45	46	46	43	180

Problema II (3 puntos). Greta es una niña de un año. Una observación informal parece demostrar que ella cambia de preferencia manual varias veces. La mayoría de los niños a esa edad muestran una tendencia firme hacia una de las manos pero hay excepciones. Sea X la frecuencia con la cual Greta utiliza su mano derecha para comer durante un día. Si Greta fuese diestra se sabe que X tendría una distribución con densidad $f_0(x) = e^{5x-3.38}$ en el intervalo $x \in [0,1]$. En cambio, si ella fuese zurda la distribución de X tendría como densidad $f_1(x) = e^{-3x+1.15}$ en el intervalo $x \in [0,1]$.

1. Hallar el Test UMP (Neyman-Pearson) basado en la observación de X para contrastar H_0 : “Greta es diestra” frente a H_1 : “Greta es zurda” (nivel $\alpha = 5\%$).
2. Representar en el gráfico a continuación los errores α y β del test.
3. Calcular y comentar la potencia de este test.



Problema III (4 puntos). Un internauta se da cuenta de que la velocidad de su conexión a un servidor de internet varía mucho de un día a otro. Con el fin de poder predecir esta velocidad θ (expresada en Kbytes/segundos), mide diariamente esta velocidad y concluye a partir de los datos recogidos que la variable θ sigue aproximadamente una exponencial con media 15. Para medir los errores de una predicción d de θ se utilizará la función cuadrática $w(d, \theta) = (d - \theta)^2$.

1. ¿Cuál sería la mejor predicción de θ basada en el estudio de este internauta? Dar el riesgo de esta predicción.
2. Para mejorar su predicción, este internauta decide tener en cuenta el número X de internautas conectados al servidor cuando el se conecta. Sospecha pues que esta variable esté relacionada con su velocidad de conexión. De hecho, observa que conociendo θ , el número X de internautas conectados sigue una Poisson con media θ .
 - (a) Demostrar que la distribución de θ condicionada por X es una Gamma.
 - (b) Deducir la mejor predicción de θ conociendo X .
 - (c) Comparar el riesgo de esta última predicción con el riesgo de la predicción del primer apartado.

Indicaciones:

- La función de densidad de una distribución gamma $G(a, b)$ se puede escribir como

$$f(x) = \frac{x^{a-1} \exp(-bx)}{C}$$

para $x > 0$ y 0 en caso contrario, donde C es una constante que no depende de x .

La media de esta distribución es a/b y su varianza es a/b^2 .

- La distribución exponencial con parámetro λ es una Gamma $G(1, \lambda)$. Su función de densidad es $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$ para $x > 0$.
- Una variable X sigue una distribución de Poisson con media θ si $P(X = x) = \frac{\theta^x}{x!} \exp(-\theta)$ para cada $x = 0, 1, 2, \dots$
- A continuación figuran los valores de los cuantiles 5% de la χ^2 con 11, 6 y 8 grados de libertad:

$$\chi_{11,5\%}^2 = 19.68 ; \chi_{6,5\%}^2 = 12.59 ; \chi_{8,5\%}^2 = 15.51$$

Duración del examen: 2h30min.

Publicación de las notas: Martes 20 a partir de las 16h.

Revisión: Jueves 22 a las 11h (despacho 10.0.09).