

Inferencia Estadística II

Junio de 2005

Problema I (3.5 puntos) En un estudio sobre una especie de ave en peligro de extinción, se cuenta el número de huevos por nido en una muestra de n nidos con el fin de contrastar si esta especie se está recuperando. Se sabe que el número de huevos X por nido es una variable aleatoria de Poisson cuya media denotada λ fue inferior o igual a $\lambda_0 = 2$ durante los años anteriores.

1. Hallar el test UMP (Neyman-Pearson) basado en la observación de los n nidos para contrastar $H_0 : \text{“La especie sigue en peligro de extinción } (\lambda \leq \lambda_0)\text{”}$ frente a $H_1 : \text{“La especie se está recuperando } (\lambda > \lambda_0)\text{”}$.
2. Dar la decisión del test (nivel de significación $\alpha = 5\%$) si se observa $\sum_{i=1}^n X_i = 450$ con $n = 200$ y X_i siendo el n° de huevos observado en el $i^{\text{ésimo}}$ nido ($i = 1, 2, \dots, n$).

Indicación: utilizar la aproximación normal de la distribución del estadístico de test (el cuantil 5% de la normal estandar es $z_{5\%} = 1.64$).

Problema II (3 puntos). A partir de un estudio basado en una muestra de hombres de entre 35 y 44 años, se quiere contrastar si la situación laboral es independiente del estado civil en esta población. Dar la decisión del test para un nivel de significación asintótico $\alpha = 5\%$, utilizando los datos que vienen en la siguiente tabla de contingencia.

	Casado	Viudo/Separado	Soltero	Total
Activo	679	103	114	896
Parado	63	10	20	93
Sin profesión	42	18	25	85
Total	784	131	159	1074

Problema III (3.5 puntos). Con el fin de luchar contra el fraude fiscal, la Agencia Tributaria quiere predecir la renta real θ (expresada en miles de Euros por año) de los hogares en España. En un primer paso, la predicción se basa en un estudio estadístico que estableció que la distribución Q de θ en la población de los hogares españoles es aproximadamente una normal con media $\mu = 20$ y varianza $\tau^2 = 100$. Si medimos el error de una predicción d de θ utilizando la función de pérdidas cuadrática $w(d, \theta) = (d - \theta)^2$,

1. ¿Cuál sería la mejor predicción de θ basada en el *a priori* Q ? Dar y comentar el error de esta predicción.
2. Para afinar esta predicción, el ministerio decide llevar un segundo estudio que analiza la relación entre la renta θ y el consumo X del hogar. En base a este estudio, se estableció que por una renta dada θ , el consumo X de los hogares con esta renta sigue una normal con media $2 + 0.8\theta$ y varianza $\sigma^2 = 10$.
 - (a) Demostrar que la distribución de θ condicionada por X es también una Normal y con media $\mathbf{E}_Q(\theta|X) = 0.54 + 1.08X$.
 - (b) Deducir la mejor predicción de θ conociendo X .
 - (c) Comparar el error de esta última predicción con el error de la primera predicción.

Indicaciones:

- Una variable X sigue una distribución de Poisson con media λ si

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} \exp(-\lambda)$$

para cada $x = 0, 1, 2, \dots$. Además, la varianza de X es igual a su media λ .

- A continuación figuran los valores de los cuantiles 5% de la χ^2 con 11, 6 y 8 grados de libertad:

$$\chi_{3,5\%}^2 = 7.82 ; \chi_{4,5\%}^2 = 9.49 ; \chi_{8,5\%}^2 = 15.51$$

Duración del examen: 2h30min.

Publicación de las notas: Jueves 16 a partir de las 16h.

Revisión: Lunes 20 a las 15h (despacho 10.0.09).