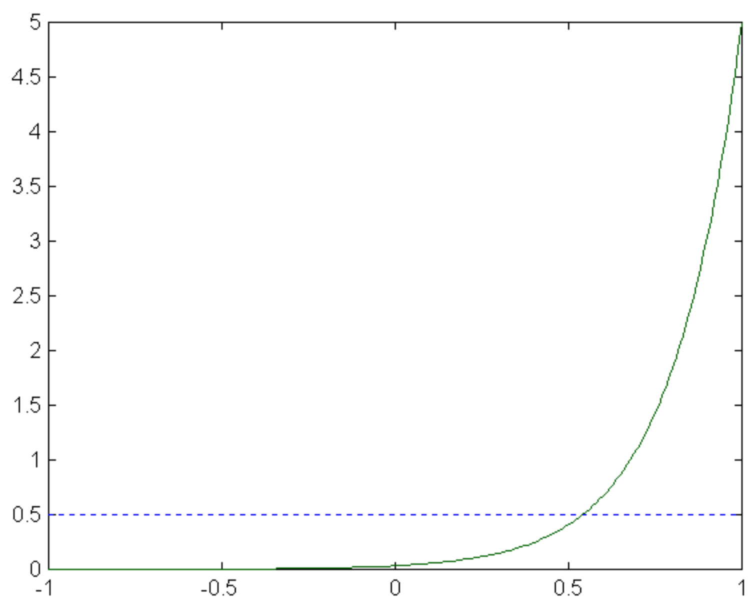
Inferencia Estadística II

Junio de 2004

Problema 1 (3 puntos) En un puesto de feria, un adolescente se divierte intentando tirar con una escopeta a unos patos de madera. El padre sospecha que la escopeta está trucada porque observa que los disparos suelen desviarse a la derecha. Sea X la posición horizontal del impacto de un disparo. Si la escopeta no estuviera trucada se sabe que X sería uniformemente distribuida en el intervalo $[-1, 1]$ (la densidad de la uniforme en el intervalo $[-1, 1]$ es $f_0(x) = \frac{1}{2}$ si $x \in [-1, 1]$ y cero en caso contrario). En cambio, si la escopeta está trucada se supone que la distribución de X tiene una densidad $f_1(x) = 5e^{5(x-1)}$ si $x \in [-1, 1]$ y 0 en caso contrario.

1. Hallar el Test UMP (Neyman-Pearson) basado en la observación de un sólo disparo para contrastar H_0 : "La escopeta no está trucada" frente a H_1 : "La escopeta está trucada" (nivel $\alpha = 5\%$).
2. Representar en el gráfico a continuación los errores α y β del test.
3. Comentar la potencia de este test.



Problema II (3 puntos). Se quiere analizar estadísticamente la dependencia entre el color de los ojos y el color del pelo. La tabla que se representa a continuación recoge datos obtenidos a partir de una muestra de 124 individuos. Contrastar a partir de estos datos, la hipótesis H_0 : "El color del pelo y el color de los ojos son dos variables independientes" (nivel asintótico $\alpha = 5\%$).

Pelo / Ojos	Rubio	Castaño	Pelirrojo	Moreno	Total
Azul	25	9	7	3	44
Verde	13	17	7	10	47
Marrón	7	13	5	8	33
Total	45	39	19	21	124

Problema III (4 puntos). Cada mañana a la misma hora, un alumno coge el autobús para acudir a la universidad. Se da cuenta de que ciertos dias, tiene que esperar mucho tiempo en la parada y sospecha que la frecuencia de autobuses varía bastante de un día a otro. Decide, durante unos dias, observar el tiempo θ (expresado en minutos) que separa la llegada de dos autobuses de su linea. Concluye a partir de su muestra de datos que θ sigue aproximadamente una exponencial con media 10. Para medir las perdidas de una predicción d de θ utiliza la función cuadrática $w(d, \theta) = (d - \theta)^2$.

1. ¿Cuál sería la mejor predicción de θ a partir del estudio de este alumno ? Dar el error de esta predicción.
2. Para mejorar su predicción, este alumno decide tener en cuenta el número de personas que están esperando en la parada. Como es natural, sospecha que esta variable esté correlada con la frecuencia de los autobuses. De hecho, observa que conociendo θ, el numero X de personas esperando sigue una Poisson con media θ.
   (a) Demostrar que la distribución de θ condicionada por X es una Gamma.
   (b) Deducir la mejor predicción de θ conociendo X.
   (c) Comparar el riesgo de esta decisión con el riesgo de la primera predicción.

Indicaciones :

- La función de densidad de una distribución gamma $G(a, b)$ se puede escribir como

$$f(x) = \frac{x^{a-1} \exp(-bx)}{C}$$

  para $x > 0$ y 0 en caso contrario, donde C es una constante que no depende de x.
  La media de esta distribución es a/b y su varianza es a/b^2.
- La distribución exponencial con parámetro λ es una Gamma $G(1, \lambda)$. Su función de densidad es $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$ para $x > 0$.
- Una variable X sigue una distribución de Poisson con media θ si $P(X = x) = \frac{\theta^x}{x!} \exp(-\theta)$ para cada $x = 0, 1, 2, \ldots$
- A continuación figuran los valores de los cuantiles 5% de la χ^2 con 11, 6 y 8 grados de libertad :

$$\chi^2_{11,5\%} = 19.68 \;;\; \chi^2_{6,5\%} = 12.59 \;;\; \chi^2_{8,5\%} = 15.51$$

Duración del examen : 2h30min.

Publicación de las notas : Jueves 10 a partir de las 16h.
Revisión : Lunes 14 a las 11h (despacho 10.0.09).