

Inferencia Estadística II

Septiembre de 2003

Problema 1 (4 puntos) Considerado como un tratamiento pionero de fertilidad hace 25 años, la fertilización in vitro (IVF, por sus siglas en inglés) es ahora un procedimiento común. Sin embargo, dado que los embriones múltiples se implantan en el útero para aumentar las probabilidades de que uno de ellos dé como resultado el embarazo, el número de gemelos, de trillizos y de otros nacimientos múltiples puede haber aumentado. La estadística de nacimientos por IVF en el año 1982, mostró que el "grado de multiplicidad en el parto" X ($X = 0$: un sólo niño; $X = 1$: gemelos; $X = 2$: trillizos; etc.....) seguía una distribución de Poisson con media $\lambda_0 = 0.1$. En el año 2002 se observó a partir de una muestra de 200 embarazos por IVF el nacimiento de 240 niños.

Se quiere contrastar H_0 : "El grado de multiplicidad en el parto no ha aumentado" frente a H_1 : "El grado de multiplicidad en el parto ha aumentado".

1. Denotamos por λ la media de X en 2002. Expresar el contraste anterior mediante λ y λ_0 .
2. Demostrar que el número esperado de niños en los 200 embarazos es, bajo la hipótesis nula, inferior o igual a 220.
3. Proponer un test basado en la muestra de datos (aquí el tamaño muestral es $n = 200$) para contrastar H_0 frente a H_1 . Dar la decisión del test con nivel $\alpha = 5\%$ (se utilizará la aproximación normal para calcular la región de rechazo de H_0).
4. Hallar el test UMP para dicho contraste.

Problema II (3 puntos). Se ha recogido una muestra de 12 datos sobre el precio de una acción que forma parte del índice IBEX:

13.53, 8.46, 13.40, 6.10, 11.19, 7.64,
13.24, 10.67, 13.21, 5.88, 11.54, 8.90

1. Proponer un test con nivel 5% para contrastar la normalidad de estos datos.
2. Sea m el valor medio del precio de esta acción durante el periodo muestral. Asumiendo normalidad, contrastar (con nivel 5%) $H_0 : m = 10$ frente a $H_1 : m \neq 10$.

Problema III (4 puntos). Un complejo hotelero tiene 500 habitaciones que son reservadas con varios meses de antelación. Para compensar las cancelaciones, el hotel ha decidido aceptar más reservas que habitaciones. El exceso de reservas tiene el inconveniente de que se produzca “overbooking” o “sobre-reserva”, es decir que el número de clientes con reserva que acudán al hotel sea superior al número de habitaciones.

- El precio de una habitación es de m euros.
- Si a un cliente con reserva confirmada se le deniega su habitación, el hotel está obligado a pagarle una compensación igual a M euros ($M > m$).
- Denotamos por d el número de reservas que fija el hotel y θ el porcentaje de reservas canceladas.

1. El gestor del hotel afirma que si $\theta = 20\%$, el valor de d que minimiza sus pérdidas es $d = 625$ reservas. Justificar esta afirmación.
2. Interpretar la cantidad $C = d(1 - \theta)$ y la siguiente función de pérdidas en este problema de decisión:

$$w(d, \theta) = \begin{cases} M(C - 500) & \text{si } C > 500 \\ 0 & \text{si } C = 500 \\ m(500 - C) & \text{si } C < 500 \end{cases}$$

3. Los datos de temporadas anteriores indican que el porcentaje θ de las reservas canceladas por los clientes sigue una distribución (*a priori*) Q que permitió deducir la función de pérdidas media (o riesgo bayesiano) $\bar{w}_Q(d)$. Esta función verifica:

$$\bar{w}_Q(d) = w(d, 15\%)$$

Representar gráficamente esta función y hallar el valor de d que la minimiza con $M = 100$ y $m = 50$.

Indicaciones:

- Una variable X sigue una distribución de Poisson con media λ si

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} \exp(-\lambda) \text{ para cada } x = 0, 1, 2, \dots$$

La media y la varianza de esta distribución son ambas iguales a λ .

- A continuación figuran los valores de los cuantiles 5% de la χ^2 con un grado de libertad y de la distribución del estadístico de Lilliefors Δ_{12}^* , así como el cuantil 2.5% de la distribución de Student con 11 grados de libertad:

$$\chi_{1,5\%}^2 = 3.841 ; \Delta_{12,5\%}^* = 0.242 ; t_{11,2.5\%} = 2.201$$

- A continuación aparece la tabla de la distribución normal estándar.

Duración del examen: 2h30min.

Publicación de las notas: Miércoles 24 a partir de las 16h.

Revisión: Viernes 26 a las 11h (despacho 10.0.09).

