Inferencia Estadística II

Dr. Olivier Nuñez Boyer

Junio del 2001

Problema 1 (3 puntos). En una empresa con 7 empleados se observó el número de llegadas tarde X diarios durante $n = 250$ días. Los datos obtenidos se presentan en la tabla siguiente:

n^o llegadas tarde (X)	0	1	2	3	4	5	6	7
n^o de días	7	33	65	72	48	19	4	2

1. Contrastar mediante el test del χ^2 la hipótesis H_0 :"X sigue una distribución binomial $B(7; 1/2)$" con un nivel $\alpha = 5\%$.

2. Ahora, se quiere contrastar la hipótesis más general H_0 :"X sigue una distribución binomial $B(7; \theta)$, donde $\theta \in]0, 1[$".

   (a) Demostrar que el estimador máximo verosímil de θ es igual a $\widehat{\theta} = \frac{1}{7n} \sum_{i=1}^{n} X_i$, donde X_i es el número de retrasos observado el i^{esimo} día.

   (b) Calcular el estadístico del χ^2 para contrastar la hipótesis múltiple anterior y dar la decisión del test.

Problema II (3 puntos). Con objeto de comparar la precisión de dos máquinas que producen monedas que tienen en teoría el mismo peso, se sacan de la producción dos muestras de monedas: se observan los pesos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de n monedas producidas por la máquina A y los pesos $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ de otras m monedas producidas por la máquina B. Suponemos que las dos muestras son independientes, que la primera muestra de pesos viene de una normal $N(1, \sigma_A^2)$ y la segunda de una normal $N(1, \sigma_B^2)$. Queremos contrastar $H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ ("misma precisión") frente a su alternativa $H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$.

1. Calcular los estimadores máximo verosímil de σ_A^2 y σ_B^2 bajo H_0 y bajo cualquier hipótesis.

2. Calcular el test de razón de verosimilitudes para $n = 10$, $m = 12$ y un nivel $\alpha = 5\%$.

3. Deducir la decisión del test en el caso en el cual se observa $\sum_{i=1}^{10} X_i = 12.3$, $\sum_{j=1}^{12} Y_j = 9.5$, $\sum_{i=1}^{10} X_i^2 = 16.1$ y $\sum_{j=1}^{12} Y_j^2 = 11.4$.

Problema III (4 puntos). El valor bursátil de una acción tiene variaciones que no se pueden controlar perfectamente. Por tanto, la decisión d de vender o no vender esta acción tiene riesgos. Se supone que la variación θ del valor de esta acción de un día al día siguiente, sigue una distribución *a priori* uniforme en el intervalo $[-1; 1]$. La decisión d toma el valor 1 si se decide vender la acción y el valor 0 en caso contrario. Para medir los riesgos de una decisión d se considera la función de perdidas:

$$w(d, \theta) = d\theta - \theta I_{\{\theta<0\}}.$$

1. Demostrar que la función $w(d, \theta)$ es siempre no negativa. Describir esta función de perdidas según los valores de θ y d.

2. Demostrar que el riesgo bayesiano $\overline{w}_Q(d)$ es igual a $\frac{1}{4}$ para cualquier decisión d ¿Que se puede concluir ?

3 Para mejorar nuestra decisión decidimos observar el comportamiento de otro accionista. Se observa su decisión X, donde $X = 1$ si este accionista vende su acción y $X = 0$ en caso contrario. Se supone que condicionalmente a θ, X sigue una distribución de Bernouilli $B(1, p(\theta))$ donde $p(\theta) = 1/(2 + \theta)$. Consideramos la decisión basada en la información muestral

$$d(X) = \begin{cases} 1 \text{ si } X = 1 \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

   (a) ¿Como justificar esta decisión ?

   (b) Demostrar que
   $$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\theta}{2+\theta} d\theta = 1 - \ln(3).$$

   (c) Calcular el riesgo bayesiano medio $W_Q\left(d(X)\right) = E\left[w\left(d(X), \theta\right)\right]$ de la decisión $d(X)$ y deducir del apartado anterior que $W_Q\left(d(X)\right) < \overline{w}_Q(d)$. ¿ Que se puede concluir ?