

Inferencia Estadística II

Dr. Olivier Nuñez Boyer

19 de Septiembre del 2000

Problema 1 (5 puntos). Se sabe que la concentración X de glóbulos blancos en la sangre de un paciente que tiene el SIDA sigue una distribución exponencial con media 0.5 mg/l, y que esta concentración es también exponencial pero con media 0.1 mg/l si el paciente es sano.

1. Proponer un test con nivel α para contrastar si un paciente tiene o no el SIDA, siendo la hipótesis nula: “El paciente es sano”.
2. Calcular la potencia del test (en función de α).
3. Con ayuda del Gráfico 1, representar mediante áreas la potencia y el nivel del test.
4. ¿Cuál será la decisión del test para un nivel $\alpha = 5\%$, si la concentración observada es igual a 0.3 mg/l. Calcular la potencia del test para este valor de α y comentar el valor del riesgo de tipo II.
5. Si la media de la concentración bajo H_1 (“El paciente tiene el SIDA”) es mayor que 0.5 mg/l, cuál es la propiedad del test que cambia? Precisar este cambio y justificarlo.

Problema II (5 puntos). En un estudio sociológico se ha observado que la proporción X de su renta que una familia gasta en bienes de primera necesidad sigue una distribución con densidad

$$\theta x^{\theta-1} \quad \text{para } 0 < x < 1,$$

donde $\theta > 0$ es un parámetro que mide la pobreza de la sociedad. A fin de evaluar la pobreza de una población se ha observado la característica X en n familias.

1. Calcular la media de X y precisar sus valores límites cuando θ es pequeño o grande.
2. A partir de la muestra, calcular el estimador de máxima verosimilitud de θ .
3. Construir el test de Wald con nivel asintótico α para contrastar $H_0 : \theta = 1$ frente a $H_1 : \theta \neq 1$.
4. ¿Cuál será la decisión del test de Wald para un nivel $\alpha = 5\%$, si se ha observado para $n = 100$, $\sum_{i=1}^{100} \ln(X_i) = -150$ (nota: $\chi_{1;5\%}^2 = 3.841$) ?
5. Construir el test UMP con nivel α para contrastar $H_0 : \theta \leq 1$ frente a $H_1 : \theta > 1$.
6. Tomar la decisión con el test anterior para un nivel $\alpha = 5\%$, si se ha observado sólo una familia por la cuál $X = 0.5$.

Indicaciones:

1. (i) La función de densidad de una distribución exponencial con parámetro λ es

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x),$$

para $x \geq 0$, y 0 en caso contrario. Su media es igual a $1/\lambda$.