

Hoja de Ejercicios # 12

1.- Las compañías aéreas suelen aceptar reservas por un $x\%$ más de las plazas disponibles. El número diario de pasajeros con reserva que no tienen plaza es aleatorio pues depende de la política de las compañías aéreas y de otras variables que no se controlan. Denotamos este número medio por θ , y se supone que su distribución *a priori* es una exponencial con parámetro λ (conocido): $Q = \text{Exp}(\lambda)$. Se quiere predecir θ . El error de una decisión d (predicción) se mide mediante la función de pérdidas cuadrática $w(d, \theta) = (d - \theta)^2$. Se pide:

(a) Comprobar que la función de pérdidas media de una decisión d es

$$\bar{w}_Q(d) = E_Q [(d - \theta)^2] = \frac{1}{\lambda^2} + \left(d - \frac{1}{\lambda}\right)^2$$

(a.1) Hallar la decisión d_Q que minimiza $\bar{w}_Q$.

(a.2) Interpretar esta decisión óptima.

(b) Para actualizar esta predicción se hace un estudio que contabiliza durante varios días el número de pasajeros con reserva que no obtienen plaza. Se observa una muestra: $X_1, X_2, \dots, X_n$, y se supone que proviene de una distribución de Poisson $P(\theta)$ con media θ .

(b.1) Comprobar que la distribución de θ *a posteriori* de las observaciones $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$ es una distribución gamma $\gamma(\sum_{i=1}^n x_i + 1, n + \lambda)$.

(b.2) Deducir la decisión $d_Q(X)$ basada en las observaciones y en la distribución *a priori* de θ que minimiza el riesgo bayesiano medio.

(b.3) Hallar el riesgo bayesiano medio asociado a esta decisión.

NOTAS AUXILIARES

- La función de densidad de una distribución exponencial $\text{Exp}(\lambda)$ con parámetro λ es $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$ si $x > 0$, y 0 en caso contrario. Su media es $\frac{1}{\lambda}$ y su varianza es $\frac{1}{\lambda^2}$.
- Si X tiene una distribución de Poisson con parámetro θ , su función de probabilidad es $\Pr(Z = k) = \frac{\theta^k}{k!} \exp(-\theta)$ para $k = 0, 1, 2, \dots$. Su media es igual a θ .
- La función de densidad de una distribución gamma $\gamma(a, b)$ es:

$$f(x) = \frac{x^{a-1} \exp(-bx)}{\int_0^\infty x^{a-1} \exp(-bx) dx},$$

si $x > 0$, y 0 en caso contrario. Su media es $\frac{a}{b}$ y su varianza es $\frac{a}{b^2}$.