

Hoja de Ejercicios # 11

1.- La probabilidad θ de tener una hija varía según las parejas. Por tanto, se considera que θ es una variable aleatoria cuya distribución *a priori* Q es una $\beta(2, 1)$. Consideremos el caso de una pareja que decide tener hijos hasta el nacimiento de la primera niña. El número de hijos que tendrá esta pareja es entonces una variable geométrica con parámetro θ desconocido (aleatorio). Para evaluar el número esperado de hijos $1/\theta$ que tendrá esta pareja se predice θ . El error de una predicción d de θ se mide mediante la función de pérdidas $w(d, \theta) = (d - \theta)^2$. Se pide:

(a) Hallar la predicción d_Q que minimiza el riesgo bayesiano $\bar{w}_Q(d) = E_Q[(d - \theta)^2]$, y calcular el valor del riesgo de esta predicción.

(b) Este error de predicción se puede mejorar si se hace la hipótesis de que la probabilidad de tener una niña siempre ha sido la misma en la familia de esta pareja. Tenemos los datos siguientes: $X_1, X_2, \dots, X_n$ son los números de hijos que tuvieron n parejas de esta familia hasta tener una niña. Esta muestra de datos proviene entonces de una distribución geométrica con parámetro θ .

(b.1) Comprobar que la distribución de θ *a posteriori* de estos datos es también una distribución β .

(b.2) Deducir la decisión $d_Q(X)$ basada sobre los datos y la distribución *a priori* Q , que minimiza el riesgo bayesiano medio.

(b.3) Mostrar que $\sum_{i=1}^n X_i \geq n$, y que la esperanza marginal $E[\sum_{i=1}^n X_i] = 2n$.

(b.4) Utilizando el resultado anterior, comprobar que el riesgo bayesiano medio asociado a la decisión $d_Q(X)$ verifica que:

$$W_Q(d_Q(X)) \leq \frac{(n+2)(n+1)}{(n+3)^2(n+4)},$$

y justificar el comportamiento de este riesgo cuando n crece. Deducir de este resultado un valor de n a partir del cual $d_Q(X)$ será mejor que d_Q .

NOTAS AUXILIARES

- Si la variable Z sigue una distribución geométrica con parámetro θ , tenemos que $\Pr(Z = z) = (1 - \theta)^{z-1}\theta$ para $z = 1, 2, 3, \dots$
- La función de densidad de una distribución $\beta(a, b)$ con parámetros $a > 0$ y $b > 0$ es:

$$f(x) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{C(a, b)},$$

si $0 \leq x \leq 1$, y 0 en caso contrario. $C(a, b)$ es una constante que no depende de x . Su media es $\frac{a}{a+b}$ y su varianza es $\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.