Hoja de Ejercicios # 8

1.- Con el objeto de comparar la virulencia de dos organismos patógenos, se inoculó con el organismo I a n conejillos de indias, de los que x manifestaron los signos de la enfermedad, y a otros m con el organismo II, entre los cuales y enfermaron. Los animales permanecieron aislados, de forma que puede suponerse que existe independencia entre los resultados en cada uno. Sean p_1 y p_2 las frecuencias con que cada tipo de organismo patógeno produce síntomas de enfermedad. Se pide:

(a) Halle el contraste de razón de verosimilitudes (basado en la distribución asintótica) para contrastar, $H_0 : p_1 = p_2$ frente a $H_1 : p_1 \neq p_2$.

(b) Aplicar los resultados al caso $n = 60$, $x = 15$, $m = 100$ e $y = 42$.

2.- Las fluctuaciones $X_1, X_2, \dots, X_n$ en la cotización de un determinado valor bursátil, respecto a su valor nominal, a lo largo de sesiones consecutivas, se supone que obedece la siguiente ley:

$$X_i = \theta X_{i-1} + e_i, \quad (1)$$

donde $X_0 = 0$ y las e_i son variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Halle el contraste de razón de verosimilitudes para contrastar la hipótesis nula de independencia $H_0 : \theta = 0$ frente a la alternativa $H_1 : \theta \neq 0$. Distinga los casos en que σ es conocida o es desconocida.

NOTAS AUXILIARES

- En el ejercicio 2, note que las observaciones no son independientes y por tanto la función de verosimilitud es: $L_{\theta, \sigma}(\mathbf{x}) = f_{\theta, \sigma}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, es decir la distribución conjunta de la muestra. En este caso, dada la relación (1) podemos calcularla mediante:

$$f_{\theta, \sigma}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i | x_{i-1}),$$

donde $f(x_i | x_{i-1})$ es la distribución de X_i condicional a $X_{i-1} = x_{i-1}$.