Hoja de Ejercicios # 5

1.- El error de medida de un amperímetro tiene distribución normal de media 0 y desviación típica θ_0, según afirma su fabricante. Para comprobar la calibración, se han tomado n medidas independientes de una corriente patrón, lo que permite conocer los errores cometidos: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Se pide:

(a) Contrastar con nivel de significación α, $H_0 : \theta = \theta_0$ frente a $H_1 : \theta = \theta_1$, distinguiendo el caso $\theta_0 < \theta_1$ y $\theta_1 < \theta_0$.

(b) Contrastar con nivel de significación α, $H_0 : \theta \leq \theta_0$ frente a $H_1 : \theta > \theta_0$, y hallar la función de potencia del contraste propuesto.

2.- Se dispone de una muestra aleatoria simple, de tamaño n de una distribución con función de densidad:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} e^{\theta - x} & \text{si } x \geq \theta \\ 0 & \text{si } x < \theta \end{cases}$$

(a) Sea $x_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}$. Calcule la función de distribución de $x_{(1)}$.

(b) Demuestre que f_θ es una familia de razón de verosimilitud creciente.

(c) Contrastar con nivel de significación α, $H_0 : \theta \leq \theta_0$ frente a $H_1 : \theta > \theta_0$, y hallar la función de potencia del contraste propuesto.

3.- Se dispone de una muestra aleatoria simple, de tamaño n de una distribución con función de distribución teórica:

$$F_\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^\theta & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases},$$

siendo $\theta > 0$. Se pide:

(a) Sea $T = -\theta \sum_{i=1}^{n} \ln X_i$. Calcule la función de distribución de T.

(b) Demuestre que f_θ es una familia de razón de verosimilitud creciente.

(c) Contrastar con nivel de significación α, $H_0 : \theta \leq \theta_0$ frente a $H_1 : \theta > \theta_0$.

Notas auxiliares

- Si $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ son v.a. independientes e igualmente distribuidas según una distribución exponencial de parámetro θ, entonces $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ se distribuye como una $Gamma(n, \theta)$.
- Si $Y \sim Gamma(n, \theta)$ entonces $Z = 2\theta Y$ se distribuye como una χ^2_{2n}.