Hoja de Ejercicios # 4

1.- Sea X una observación que proviene de una distribución Cauchy(θ). Dado que el contraste:

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 1 & si\ 1 < x < \sqrt{3} \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

para $H_0 : \theta = 0$ frente a $H_1 : \theta = 1$. Se pide:

(a) Calcule la probabilidad del error de tipo I y del error de tipo II de ϕ_0.

(b) Sean ϕ_1 y ϕ_2 definidos por:

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 1 & si\ x < u_1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases} \quad y \quad \phi_2(x) = \begin{cases} 1 & si\ x > u_2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Halle el valor de los umbrales u_1 y u_2 tales que los contrastes ϕ_1 y ϕ_2 tengan igual nivel que ϕ_0.

(c) ¿Cuál contraste es más potente?

2.- Sea $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ una muestra aleatoria simple del vector aleatorio (X,Y) cuya distribución es continua. Se pide:

(a) Bajo la hipótesis "$H_0 : (X, Y)$ *tiene la misma distribución que* (Y, X)", probar que la distribución de $Z = X - Y$ es simétrica respecto del origen.

(b) Probar que aceptar la hipótesis "H_1 : *la mediana de* Z *es positiva*" implica rechazar la hipótesis H_0.

(c) Proponer un contraste para H_0 frente a H_1 basado en el siguiente estadístico: T número de veces que $X_i - Y_i > 0$ en la muestra dada.

Notas auxiliares

- La función de densidad de una v.a. Cauchy(θ) es:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1 + (x-\theta)^2},\ con - \infty < x < +\infty\ y\ - \infty < \theta < +\infty$$

  y su función de distribución es:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x - \theta).$$

- En el ejercicio 2(c), el estadístico T sigue una distribución binomial $Bin(n, p = \frac{1}{2})$ (bajo H_0).