Hoja de Ejercicios # 3

1.- Se sabe que la concentración X de glóbulos blancos en la sangre de un paciente que tiene el SIDA sigue una distribución exponencial con media 0.5 mg/l, y que esta concentración es también exponencial pero con media 0.1 mg/l si el paciente es sano. Se pide:

(a) Proponer un contraste con nivel α para contrastar si un paciente tiene o no el SIDA, siendo la hipótesis nula: "El paciente es sano".

(b) Calcular la potencia del contraste (en función de α).

(c) Representar en un gráfico mediante áreas la potencia y el nivel del contraste.

(d) ¿Cuál será la decisión del contraste para un nivel $\alpha = 5\%$, si la concentración observada es igual a 0.3 mg/l? Calcular la potencia del contraste para este valor de α y comentar el valor del riesgo de tipo II.

(e) Si la media de la concentración bajo H_1 ("El paciente tiene el SIDA") es mayor que 0.5 mg/l, ¿cuál es la propiedad del contraste que cambia? Precisar este cambio y justificarlo.

2.- Se tiene una muestra aleatoria simple $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de una población $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Se pide:

(a) Demostrar que el contraste uniformemente más potente UMP para $H_0 : \sigma = \sigma_0$ frente a $H_1 : \sigma = \sigma_1$ con $\sigma_0 < \sigma_1$ es:

$$\phi(\sum X_i^2) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \sum_{i=1}^n X_i^2 > c \\ 0 & \text{si} \quad \sum_{i=1}^n X_i^2 \leq c \end{cases}$$

(b) Obtenga una expresión para c en función del nivel α.

(c) ¿Cuál será la decisión del contraste ($\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 2$, $\alpha = 0.05$) si tenemos en una muestra de tamaño $n = 10$ que $\sum_{i=1}^n X_i^2 = 25$?