# Examen de Teoría Estadística Elemental I
# Enero 2009

Duración: 2.5 horas.
Entregar el impreso del examen junto al cuaderno de respuestas.
Intentar todas las 5 preguntas. La nota máxima es de 10.

1. Un profesor tiene un perro llamado Contramaestre. Cuando pasea a su perro por la calle, el número de meaditas que hace por minuto sigue una distribución de Poisson con una media de 0.5 meaditas por minuto.

   *a*) Si el profe sale con su perro, ¿cuál es la probabilidad de que en el primer minuto, Contramaestre no haga pis? (0.5 puntos)

   *b*) Si hace un paseo de 20 minutos, hallar el número medio de meadas que hace. ¿Cuál es la probabilidad de que mee más de 8 veces? (0.75 puntos)

   *c*) Calcular la probabilidad de que el perro pase más de dos minutos antes de hacer su primera meada. (0.5 puntos)

   *d*) Un día el profe decide dar un paseo de dos horas con el perro. Estimar la probabilidad de que el perro mee menos de 55 veces. (0.75 puntos)

2. Supóngase que la variable $X$ tiene función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + cx & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto de los casos} \end{cases}$$

   *a*) Demostrar que $c = 4/3$. (0.5 puntos)

   *b*) Hallar la función de distribución, $F(x)$ y calcular la probabilidad de que $X > 0{,}5$. (0.75 puntos)

   *c*) Calcular la media y la varianza de la distribución. (1.25 puntos)

3. La hora de entrada al trabajo en una oficina es las 9:00 h. La hora a la que un cierto empleado llega al trabajo sigue una distribución normal de media 9,1 y desviación típica 0,05, dependiendo del tráfico que se encuentra en el camino desde su casa.

   *a*) Calcula la probabilidad de que llegue tarde. (0.5 puntos)

   *b*) Suponiendo que un día llega tarde, ¿cuál es la probabilidad de que el retraso sea como mucho de un cuarto de hora, es decir 0.25 horas? (0.75 puntos) *c*) Si su jefe le observa durante cinco días, ¿cuál será la probabilidad de que llegue tarde al menos tres de ellos? (0.5 puntos)

*d*) El jefe bonifica el empleado con 12 euros cada vez que no llega tarde y le multa con 10 euros cada vez que si llega tarde. Calcular las ganancias o pérdidas esperadas del empleado en una semana de 5 días. (0.75 puntos)

4. Al responder a una pregunta de elección multiple, un estudiante o sabe la respuesta o la responde al azar. Si responde al azar tiene una probabilidad de $1/5$ de acertar porque cada pregunta tiene cinco respuestas posibles. Por estudios anteriores en exámenes de este estilo, el estudiante sabe las respuestas a un 40 % de las preguntas.

   *a*) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante responda correctamente a una pregunta? (0.5 puntos)

   *b*) Suponiendo que el estudiante haya acertado, calcular la probabilidad de que supiese la respuesta. (0.75 puntos)

   *c*) Suponiendo que un examen contiene diez preguntas, hallar:

      i la nota media del estudiante en el examen. (0.25 puntos)

      ii la varianza de la nota obtenida en el examen. (0.25 puntos)

      iii la probabilidad de que consiga una calificación de Aprobado, es decir, que obtenga 5 o 6. (0.75 puntos)

5. *a*) En la Primitiva un jugador selecciona 6 números distintos de 1 a 49. Si estos números coinciden con los 6 números ganadores, el jugador gana el primer premio.

      i ¿Cual es la probabilidad de ganar? (0.5 puntos)

      ii Hallar la probabilidad de no acertar ningún número? (0.5 puntos)

      iii Calcular la probabilidad de acertar exactamente tres números. (0.5 puntos)

   *b*) El juego de Euromillones consiste en acertar 5 números de una tabla de 50 y además acertar 2 números (estrellas) de una tabla de 9. Es decir, para tener derecho al primer premio hay que acertar 7 números (5 + 2). ¿Cúal es la probabilidad de ganar el primer premio? (1 punto)

## Algunas distribuciones

1. **Binomial**

   $X \sim \mathcal{B}(n, \theta)$ si

   $$P(X = x) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \quad x = 0, 1, \ldots, n.$$

   $E[X] = n\theta$ y $V[X] = n\theta(1-\theta)$.

2. **Geométrica**

   $X \sim \mathcal{G}(\theta)$ si

   $$P(X = x) = \theta(1-\theta)^x \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

   $E[X] = \frac{1-\theta}{\theta}$ y $V[X] = \frac{1-\theta}{\theta^2}$.

3. **Hipergeometrica**

   $X \sim \mathcal{H}(n, R, N)$ si

   $$P(X = x) = \frac{\binom{R}{x}\binom{N-R}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

4. **Poisson**

   $X \sim \mathcal{P}(\theta)$ si

   $$P(X = x) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

   $E[X] = V[X] = \theta$.

5. **Exponencial**

   $X \sim \mathcal{E}(\theta)$ si

   $$f(x) = \theta e^{-\theta x} \quad x \geq 0$$

   $E[X] = 1/\theta$, $V[X] = 1/\theta^2$.

6. **Normal**

   $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si

   $$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \quad \forall x.$$

   $E[X] = \mu$ y $V[X] = \sigma^2$.