1. *a*) Sea $X$ el número de meaditas que hace. Luego $X \sim \mathcal{P}(0{,}5)$ y

$$P(X=0) = \frac{0{,}5^0 e^{-0{,}5}}{0!} = e^{-0{,}5} \approx 0{,}6065.$$

*b*) En 20 minutos, hace una media de $20 \times 0{,}5 = 10$ meaditas. Luego, el número de meaditas que hace es $Y \sim \mathcal{P}(10)$ y

$$P(Y > 8) = 1 - P(Y \leq 8) \approx 1 - 0{,}3328 = 0{,}6672$$

usando las tablas.

*c*) Sea $T$ el tiempo hasta que mee, luego $T \sim \mathcal{E}(0{,}5)$.

$$P(T > 2) = \int_2^\infty 0{,}5 \exp(-0{,}5t)\, dt = [-\exp(-0{,}5t)]_2^\infty = \exp(-1) = 0{,}3679.$$

Otra manera de resolverlo es decir que

$$P(T > 2) = P(\text{no mea en un periodo de 2 minutos})$$

y recordar que el número de meaditas, $Z$ que hace en 2 minutos es $Z \sim \mathcal{P}(0{,}5 \times 2) = \mathcal{P}(1)$ y luego

$$P(Z=0) = \frac{1^0 e^{-1}}{0!} = e^{-1} = 0{,}3679.$$

*d*) Sea $M$ el número de meaditas que hace en 2 horas. Luego $M \sim \mathcal{P}(120 \times 0{,}5) = \mathcal{P}(60)$ y $E[M] = V[M] = 60$. Ahora

$$\begin{aligned}
P(M < 55) &= P(M \leq 54) \\
&= P(M < 54{,}5) \\
&= P\left(\frac{M-60}{\sqrt{60}} < \frac{54{,}5-60}{\sqrt{60}}\right) \\
&\approx P(Z < -0{,}7100) \quad \text{donde } Z \sim \mathcal{N}(0,1), \text{ usando el teorema central del límite} \\
&= P(Z > 0{,}7100) \quad \text{por simetría} \\
&= 1 - P(Z < 0{,}7100) = 1 - 0{,}7612 \quad \text{usando las tablas} \\
&= 0{,}2388
\end{aligned}$$

2. *a*) Se sabe que para cualquier variable, $X$, se tiene $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$. Luego en nuestro caso,

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \\
&= \int_0^1 x^2 + cx\, dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} + c\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3} + \frac{c}{2} \Rightarrow \\
\frac{c}{2} &= \frac{2}{3} \Rightarrow \\
c &= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

*b*) Si $x \leq 0$ luego $F(x) = 0$ y si $x \geq 1$, luego $F(x) = 1$. En caso contrario,

$$F(x) = \int_0^x u^2 + \frac{4}{3}u\,du = \left[\frac{u^3}{3} + \frac{2u^2}{3}\right]_0^x = \frac{1}{3}(x^3 + 2x^2)$$

Ahora $P(X > 0{,}5) = 1 - P(X \leq 0{,}5) = 1 - F(0{,}5) = 1 - \frac{1}{3}(0{,}5^3 + 2 \times 0{,}5^2) = \frac{19}{24} \approx 0{,}7917$.

*c*) Para cualquier variable, $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$. Aquí tenemos

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^1 x \times \left(x^2 + \frac{4}{3}x\right)\,dx \\ &= \int_0^1 \left(x^3 + \frac{4}{3}x^2\right)\,dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{9}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{4}{9} = \frac{25}{36} \approx 0{,}6944. \end{aligned}$$

Además, $V[X] = E[X^2] - E[X]^2$ y aquí,

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_0^1 x^2 \times \left(x^2 + \frac{4}{3}x\right)\,dx \\ &= \int_0^1 \left(x^4 + \frac{4}{3}x^3\right)\,dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15} \approx 0{,}5333 \end{aligned}$$

Luego $V[X] = \frac{8}{15} - \left(\frac{25}{36}\right)^2 \approx 0{,}0512$.

3. La hora de entrada al trabajo en una oficina es las 9:00 h. La hora a la que un cierto empleado llega al trabajo sigue una distribución normal de media 9,1 y desviación típica 0,05, dependiendo del tráfico que se encuentra en el camino desde su casa.

*a*) Sea $T$ el tiempo de llegada. Luego $T \sim \mathcal{N}(9{,}1, 0{,}05^2)$ y queremos $P(T > 9$. Luego

$$P(T > 9) = P\left(\frac{T - 9{,}1}{0{,}05} > \frac{9 - 9{,}1}{0{,}05}\right) = P(Z > -2) \quad \text{donde } Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Entonces, $P(Z > -2) = P(Z < 2)$ por simetría $\approx 0{,}9773$ usando las tablas.

*b*) Buscamos la probabilidad condicionada $P(T < 9{,}25|T > 9)$. Luego

$$P(T < 9{,}25|T > 9) \quad = \quad \frac{P(T < 9{,}25 \cap T > 9)}{P(T > 9)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{P(9 < T < 9{,}25)}{0{,}9773} \\
&= \frac{P\left(\frac{9-9{,}1}{0{,}05} < \frac{T-9{,}1}{0{,}05} < \frac{9{,}25-9{,}1}{0{,}05}\right)}{0{,}9773} \\
&= \frac{P(-2 < Z < 3)}{0{,}9773} \\
&= \frac{P(Z < 3) - P(Z < -2)}{0{,}9773} \\
&= \frac{0{,}9987 - (1 - 0{,}9773)}{0{,}9773} = 0{,}9986
\end{aligned}
$$

*c*) Sea $N$ el número de días en los que llega tarde. Lluego $N \sim \mathcal{B}(5, 0{,}9773)$ y

$$
\begin{aligned}
P(N \geq 3) &= \sum_{n=3}^{5} P(N = n) \\
&= \sum_{n=3}^{5} \binom{5}{n} 0{,}9773^n (1 - 0{,}9773)^{5-n} \\
&= 10 \times 0{,}9773^3 \times 0{,}0227^2 + 5 \times 0{,}9773^4 \times 0{,}0227 + 0{,}9773^5 \approx 0{,}9999
\end{aligned}
$$

*d*) Sea $B$ el beneficio neto del empleado en un día. Luego

$$E[B] = 12 \times P(\text{llega a tiempo}) - 10 \times P(\text{llega tarde}) = 12 \times 0{,}0227 - 10 \times 0{,}9773 \approx -9{,}5$$

Los beneficios esperados en 5 días serían de $5 \times -9{,}5 \approx -47{,}5$ euros.

4. *a*) Sea $C$ el suceso de que responda correctamente, $S$ el suceso de que sepa la respuesta y $A = \bar{S}$ el suceso de que responda al azar. Luego, $P(S) = 0{,}4$ y $P(A) = 0{,}6$ y $P(C|S) = 1$ y $P(C|A) = \frac{1}{5} = 0{,}2$. Queremos

$$P(C) = P(C|S)P(S) + P(C|A)P(A) = 1 \times 0{,}4 + 0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}52$$

*b*) Aquí queremos $P(S|C)$ y luego

$$
\begin{aligned}
P(S|C) &= \frac{P(C|S)P(S)}{P(C)} \quad \text{por el teorema de Bayes} \\
&= \frac{1 \times 0{,}4}{0{,}52} \\
&= \frac{10}{13} \approx 0{,}7692
\end{aligned}
$$

*c*) Sea $N$ la nota del estudiante en el examen. Luego $N \sim \mathcal{B}(10, 0{,}52)$ y luego

i La nota media del estudiante en el examen es $10 \times 0{,}52 = 5{,}2$.

ii La varianza es $10 \times 0{,}52 \times 0{,}48 = 2{,}496$.

iii La probabilidad de Aprobado es

$$\begin{aligned} P(N=5 \text{ o } 6) &= P(N=5)+P(N=6) \\ &= \binom{10}{5} 0{,}52^5 0{,}48^5 + \binom{10}{6} 0{,}52^6 0{,}48^4 = 0{,}4645 \end{aligned}$$

5. *a*) i

$$\begin{aligned} P(\text{ganar}) &= \frac{6\times 5\times\cdots\times 1}{49\times 48\times\cdots\times 44} \\ &= \frac{1}{13983816} \approx 0{,}00000007151 \end{aligned}$$

ii En este caso, la probabilidad es

$$\frac{43\times 42\times\cdots\times 38}{49\times 48\times\cdots\times 44} \approx 0{,}4360$$

iii En este caso, usamos la probabilidad hipergeometrica

$$p = \frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} \approx 0{,}0177$$

*b*) Para ganar el primer premio se tiene que ganar en ambas partes y luego, la probabilidad de acertar en la primera es

$$\frac{5\times 4\times\cdots\times 1}{50\times 49\times\cdots\times 46} = \frac{1}{2118760}$$

y la probabilidad de ganar en la segunda es

$$\frac{2\times 1}{9\times 8} = \frac{1}{36}$$

y entonces, la probabilidad de ganar en euromillones es

$$\frac{1}{2118760}\times\frac{1}{36} = \frac{1}{76275360} \approx 0{,}0000001311$$