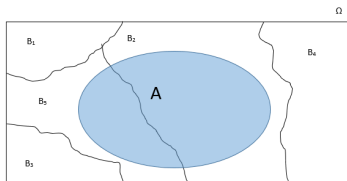


Repaso de algunos resultados de probabilidad

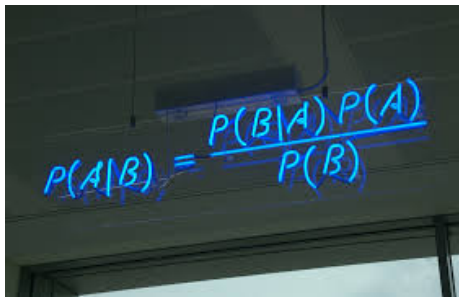


Mike Wiper

Departamento de Estadística
Universidad Carlos III de Madrid

Grado en Estadística y Empresa

Objetivo

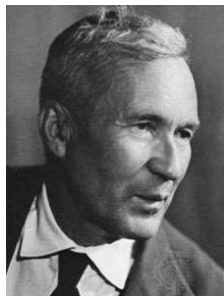


A photograph of a whiteboard with the formula for Bayes' theorem written in blue marker. The formula is $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$. The whiteboard is slightly tilted and the lighting is somewhat dim, with some shadows visible.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Refamiliarizarnos con las propiedades de la probabilidad, en particular la probabilidad condicionada y el teorema de Bayes.

Probabilidad



En los años 30 del siglo pasado, Kolmogorov formalizó los axiomas de la probabilidad matemática:

- 1 $P(S) \geq 0$ para cualquier suceso S .
- 2 $P(\Omega) = 1$.
- 3 Si S_1, S_2, \dots, S_n son *incompatibles*, entonces:
$$P(S_1 \cup S_2 \cup \dots, S_n) = \sum_{i=1}^n P(S_i).$$

El último axioma implica que bajo muestreo al azar, la probabilidad de un suceso es proporcional al número de *sucesos elementales* que contiene.

Probabilidad

Se disponen de los registros del número y el tipo de establecimientos que tienen 100 empresarios. La tabla de frecuencias es:

		Número de establecimientos				Total
		1	2	3	4	
Tipo de establecimiento	Quiosco	25	15	8	5	53
	Frutería	15	6	5	0	26
	Bar	10	4	5	2	21
	Total	50	25	18	7	100

Si seleccionamos un empresario al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga exactamente un establecimiento de tipo quiosco? ¿Y la probabilidad de que tenga exactamente un establecimiento?

Independencia

Dos sucesos A y B son estadísticamente *independientes* si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

¿Son estadísticamente independientes los sucesos tener frutería y tener cuatro establecimientos?

¿Cómo interpretamos la independencia?

Probabilidad condicionada

Si $P(B) > 0$, la probabilidad de un suceso B dado A es:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Sabiendo que el empresario sólo tiene un establecimiento, ¿cuál es la probabilidad de que sea quiosco?

Interpretando la independencia estadística

Utilizando la definición de la probabilidad condicionada, si A y B son independientes, entonces:

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Luego si se sabe que B ha ocurrido, la probabilidad de A no cambia.

La ley de la multiplicación

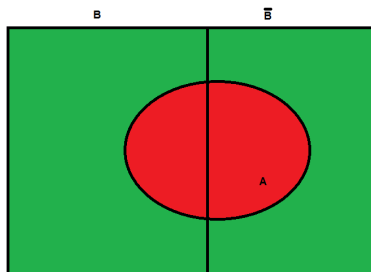
Reordenando la fórmula para la probabilidad condicionada, se tiene:

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B).$$



Si reparten dos naipes de una baraja española, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean oros?

La ley de la probabilidad total

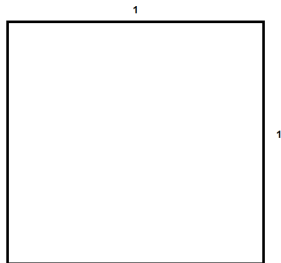


Para dos sucesos A y B ,

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}).$$

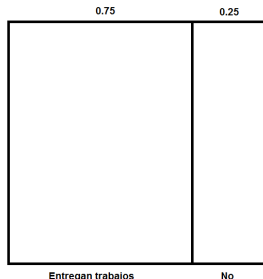
Se ha observado que un 90 % de los estudiantes que entregan los trabajos del curso acaban aprobando, mientras sólo un 30 % de los que no entregan los trabajos aprueban. En un curso dado, un 75 % de los estudiantes entregan los trabajos. Hallar la probabilidad de que un estudiante apruebe.

Un diagrama de Venn para entender la ley de la probabilidad total



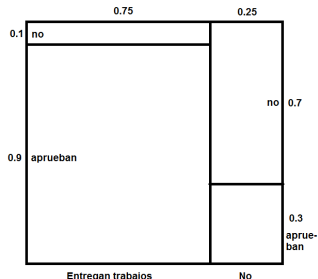
Dibujamos un cuadrado de anchura y altura igual a 1 para representar el mundo del problema.

Un diagrama de Venn para entender la ley de la probabilidad total



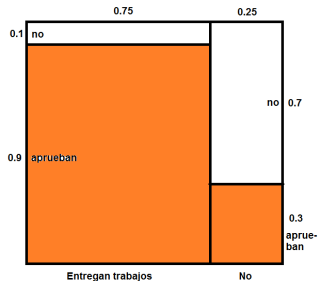
Dividimos el mundo entre los que entregan los trabajos y los que no.

Un diagrama de Venn para entender la ley de la probabilidad total



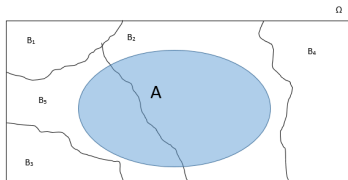
Dividimos las dos secciones de acuerdo con las probabilidades condicionales de aprobar.

Un diagrama de Venn para entender la ley de la probabilidad total



Luego, la probabilidad de aprobar es la parte colorida del cuadrado.

Extendiendo la ley de la probabilidad total



De manera más general, si B_1, \dots, B_k forman una *partición*, entonces

$$P(A) = \sum_{j=1}^k P(A|B_j)P(B_j).$$

En las 2019 elecciones al ayuntamiento de Madrid, aproximadamente 31 % de los votantes optaron por Más Madrid, 24 % por el PP, 19 % al Ciudadanos, 14 % al PSOE y los demás a otros partidos. Se estima que un 80 % de los votantes de Más Madrid están a favor de continuar con Madrid Central mientras este número cae en el caso de los votantes de otros partidos: 70 % en el caso del PSOE, 50 % para Ciudadanos y 10 % para otros partidos. Si se elige un votante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que quiera continuar con Madrid Central?

El teorema de Bayes

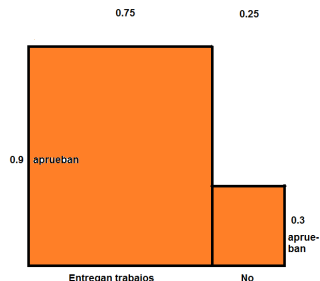
Para dos sucesos A , B , tal que $P(A) > 0$, se tiene:

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}.$$

Suponiendo que el estudiante apruebe, ¿cuál es la probabilidad de que haya entregado los trabajos del curso?

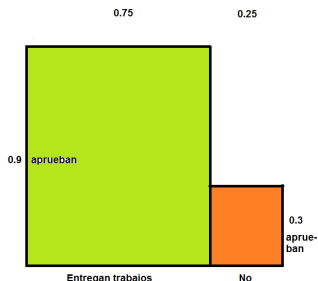
Si el votante quiere que Madrid Central siga, ¿cuál es la probabilidad de que votó a Más Madrid?

El teorema de Bayes a través del diagrama de Venn



Sabiendo que el estudiante ha aprobado, el mundo cambia.

El teorema de Bayes a través del diagrama de Venn



La probabilidad de que entregó los trabajos es igual a la proporción del nuevo mundo donde sí entregó: el área del cuadrado en lima partido por la suma del lima y naranja.

Resumen y siguiente sesión

En esta sesión, hemos repasado algunas leyes fundamentales de la probabilidad: en particular la ley de la probabilidad total y el teorema de Bayes.

$$\int p(x) dx = 1$$

$$p(x) = \int p(x, y) dy$$

$$p(x) = \int p(x|y)p(y) dy$$

En la siguiente sesión, repasamos las variables estadísticas, las distribuciones conjuntas y condicionales de varias variables y la ley de probabilidad total y el teorema de Bayes para variables.