Métodos Bayesianos
Ejercicios sobre variables: soluciones

1. *Sea* $Y|\theta \sim$ *Exponential*(θ) *con* $\theta \sim$ *Gamma*(α, β).

   (a) *Hallar la distribución conjunta de* Y *e* θ.
   Por la ley de la multiplicación,

$$\begin{aligned} f(y,\theta) &= f(y|\theta) f(\theta) \\ &= \underbrace{\theta e^{-\theta y}}_{f(y|\theta)} \underbrace{\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}}_{f(\theta)} \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^\alpha e^{-(\beta+y)\theta} \quad \text{para } y, \theta > 0. \end{aligned}$$

   (b) *Calcular la distribución marginal de* Y.

$$\begin{aligned} f(y) &= \int f(y,\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^\alpha e^{-(\beta+y)\theta}\, d\theta \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \theta^\alpha e^{-(\beta+y)\theta}\, d\theta \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \theta^{\overbrace{(\alpha+1)}^{\alpha^*}-1} e^{-\overbrace{(\beta+y)}^{\beta^*}\theta}\, d\theta \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha^*)}{\beta^{*\alpha^*}} \int_0^\infty \frac{\beta^{*\alpha^*}}{\Gamma(\alpha^*)} \theta^{\alpha^*-1} e^{-\beta^*\theta}\, d\theta \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha^*)}{\beta^{*\alpha^*}} \quad \text{porque el integrando es una densidad gamma}(\alpha^*, \beta^*) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)(\beta+y)^{\alpha+1}} \\ &= \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+y)^{\alpha+1}} \quad \text{para } y > 0 \text{, porque } \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

   Se tiene que $Y + \beta$ tiene una densidad Pareto: es decir que si $X = Y + \beta$, entonces

$$f(x) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{x^{\alpha+1}} \quad \text{para } x > \beta.$$

(c) *Calcular la media de Y.*

Hay dos maneras de hacer el cálculo:

i. Directamente a través de la distribución marginal de Y

$$
\begin{aligned}
E[Y] &= \int y f(y)\, dy \\
&= \int_0^\infty y \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+y)^{\alpha+1}}\, dy \\
&= \int_0^\infty (y+\beta-\beta) \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+y)^{\alpha+1}}\, dy \\
&= \int_0^\infty \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+y)^{\alpha}}\, dy - \beta \int_0^\infty \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+y)^{\alpha+1}}\, dy \\
&= \alpha\beta^\alpha \int_0^\infty \frac{1}{(\beta+y)^{(\alpha-1)+1}}\, dy - \beta \quad \text{como el segundo integrando es } f(y), \\
&= \frac{\alpha\beta^\alpha}{\alpha^*\beta^{\alpha^*}} \int_0^\infty \frac{\alpha^*\beta}{(\beta+y)^{\alpha^*+1}}\, dy - \beta \quad \text{donde } \alpha^* = \alpha - 1 \\
&= \frac{\alpha\beta^\alpha}{\alpha^*\beta^{\alpha^*}} - \beta \\
&= \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\alpha-1)\beta^{\alpha-1}} - \beta \\
&= \frac{\beta}{\alpha-1} \quad \text{para } \alpha > 1
\end{aligned}
$$

ii. Usando la ley de las esperanzas iteradas.

$$
\begin{aligned}
E[Y] &= E[E[Y|\theta]] \\
&= E\left[\frac{1}{\theta}\right] \quad \text{recordando la fórmula para la media de una exponencial,} \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\theta} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}\, d\theta \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \theta^{\overbrace{(\alpha-1)}^{\alpha^*}-1} e^{-\beta\theta}\, d\theta \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha^*)}{\beta^{\alpha^*}} \int_0^\infty \frac{\beta^{\alpha^*}}{\Gamma(\alpha^*)} \theta^{\alpha^*-1} e^{-\beta\theta}\, d\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha^*)}{\beta^{\alpha^*}} \\
&= \frac{\beta^\alpha \Gamma(\alpha - 1)}{\beta^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \\
&= \frac{\beta}{\alpha - 1}.
\end{aligned}
$$

(d) *Calcular la distribución de θ dado $Y = y$.*

$$
\begin{aligned}
f(\theta|y) &= \frac{f(y,\theta)}{f(y)} \\
&= \frac{\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^\alpha e^{-(\beta+y)\theta}}{\frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+y)^{\alpha+1}}} \\
&= \frac{(\beta+y)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}\theta^{(\alpha+1)-1}e^{-(\beta+y)\theta} \quad \text{para } \theta > 0,
\end{aligned}
$$

que es una distribución gamma: $\theta|y \sim \text{Gamma}(\alpha + 1, \beta + y)$.

2. *Sea $Y|\mu \sim$ Normal(μ, σ^2) con $\mu \sim$ Normal(m, v) y σ^2 conocido.*

   (a) *Hallar la distribución conjunta de Y e μ.*
   Hay dos maneras de hacerlo:

   i. Directamente a través de la ley de la multiplicación:

$$
\begin{aligned}
f(y,\mu) &= f(y|\mu)f(\mu) \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-\frac{1}{2v}(\mu-m)^2} \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^2 v}}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma^2}(y-\mu)^2+\frac{1}{v}(\mu-m)^2\right]}
\end{aligned}
$$

   No es directamente obvio que densidad es.

   ii. Usando las propiedades de la distribución normal:
   Observamos que $Y = \mu + \epsilon$ donde $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$ es independiente de μ. Luego:

$$
\begin{aligned}
E[Y] &= E[\mu] + E[\epsilon] = m + 0 = m \\
V[Y] &= V[\mu] + V[\epsilon] = v + \sigma^2 \\
Cov[Y, \mu] &= Cov[\mu + \epsilon, \mu] = V[\mu] = v
\end{aligned}
$$

Luego: $\begin{pmatrix} Y \\ \mu \end{pmatrix} \sim \text{Normal}\left(\begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} v+\sigma^2 & v \\ v & v \end{pmatrix}\right)$.

(b) *Calcular la distribución marginal de Y.*

Podemos integrar la densidad conjunta con respeto a μ, pero si hemos recordado las propiedades de la normal, tenemos que directamente, $Y \sim \text{Normal}(m, v+\sigma^2)$.

(c) *Calcular la media de Y.*

Si hemos recordado las propiedades de la normal, tenemos directamente que $E[Y] = m$.

De otra manera, a través de la ley de las esperanzas iteradas,

$$E[Y] = E[E[Y|\mu]] = E[\mu] = m.$$

(d) *Calcular la distribución de μ dado $Y = y$.*

Podemos hacer el cálculo usando el teorema de Bayes:

$$\begin{aligned}
f(\mu|y) &= \frac{f(y|\mu)f(\mu)}{f(y)} \\
&\propto f(y|\mu)f(\mu) \\
&\propto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{1}{2v}(\mu-m)^2} \\
&\propto e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma^2}(y-\mu)^2 + \frac{1}{v}(\mu-m)^2\right]} \\
&\propto e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{v}\right)\mu^2 - 2\left(\frac{y}{\sigma^2}+\frac{m}{v}\right)\mu + y^2 + m^2\right]} \\
&\propto e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{v}\right)\mu^2 - 2\left(\frac{y}{\sigma^2}+\frac{m}{v}\right)\mu\right]} \\
&\propto e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{v}\right)\left[\mu^2 - 2\frac{\frac{y}{\sigma^2}+\frac{m}{v}}{\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{v}}\mu\right]} \\
&\propto e^{-\frac{1}{2v^{*2}}\left[\mu^2 - 2m^*\mu\right]} \quad \text{donde } v^* = \left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{v}\right)^{-1} \text{ y } m^* = v^*\left(\frac{y}{\sigma^2}+\frac{m}{v}\right) \\
&\propto e^{-\frac{1}{2v^{*2}}\left[\mu^2 - 2m^*\mu + m^{*2} - m^{*2}\right]} \\
&\propto e^{-\frac{1}{2v^{*2}}(\mu-m^*)^2}
\end{aligned}$$

que es una distribución normal, $\mu|y \sim \text{Normal}\,(m^*, v^*)$.