

Métodos Bayesianos

Ejercicios sobre distribuciones conjugadas

- 1) Supongamos que en 20 tiradas independientes de una moneda se observan 5 cruces y 15 caras. Si la distribución a priori de $\vartheta = P(\text{cruz})$ es una distribución uniforme,
 - a. ¿Cuál es el valor del estimador máximo verosímil para ϑ .
 - b. Calcular la distribución a posteriori de ϑ .
 - c. Calcular la media, mediana y moda de la distribución a posteriori.
- 2) En el problema anterior, supongamos ahora que la distribución a priori es una mixtura: $\vartheta \sim 0,6 \text{Beta}(1,1) + 0,4 \text{Beta}(5,1)$.
 - a. Calcular la distribución a posteriori de ϑ ahora.
 - b. Calcular la media de esta distribución.
 - c. Graficar la distribución a priori, la verosimilitud escalada y la distribución a posteriori.
- 3) Sea $Y|\vartheta \sim \text{Exponential}(\vartheta)$.
 - a. Demuestra que esta distribución es una familia exponencial.
 - b. Luego, hallar la forma de una distribución a priori conjugada para ϑ .
 - c. ¿Qué distribución es?
 - d. Dada una muestra y_1, \dots, y_n , hallar la distribución a posteriori de ϑ .
- 4) Supongamos que $Y|\vartheta \sim \text{Uniforme}(0,\vartheta)$.
 - a. Demuestra que una distribución a priori conjugada es Pareto: $f(\theta) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{\theta^{\alpha+1}}$ para $\alpha > 0$ y $\theta > \beta > 0$.
 - b. ¿Cuál es la distribución a posteriori?
 - c. Cuando $\alpha, \beta \rightarrow 0$, hallar la media a posteriori de θ . ¿Es igual al EMV?