



## Tema 4: Probabilidad

1. Experimentos aleatorios, espacio muestral, sucesos elementales y compuestos.
2. Definición de probabilidad.
3. Propiedades de la probabilidad.
4. Probabilidad condicionada, la ley de la multiplicación y independencia.
5. Ley de de la probabilidad total y Teorema de Bayes.

### Lecturas recomendadas:

- Capítulos 13 y 14 del libro de Peña y Romo (1997)



## 4.1: Experimentos aleatorios etc.

Supongamos que vamos a realizar un **experimento aleatorio** y estamos interesados en la **probabilidad** de que ocurra un determinado **suceso**.

**EXPERIMENTO:** Preguntar el voto de un ciudadano que ha votado en la última elección

**ESPACIO MUESTRAL  $\Omega$ :** Conjunto de todos los resultados básicos de un experimento, por ejemplo  $\{\text{nulo, PSOE, PP, IU, ...}\}$

**SUCESO ELEMENTAL:** Cada uno de los resultados básicos del espacio muestral, por ejemplo,  $\{\text{IU}\}$

**SUCESO COMPUESTO:** Ha votado a un partido de izquierdas  $\{\text{PSOE, IU, ...}\}$



## 4.2: Definición de probabilidad

Existe una formulación matemática de la probabilidad (axiomas de Kolmogorov) y varias interpretaciones.

1. Probabilidad clásica
2. Probabilidad frecuentista
3. Probabilidad subjetiva
4. Interpretaciones filosóficas



## La probabilidad clásica

Considera un experimento para el que todos los sucesos elementales son equiprobables. Si tenemos  $K$  sucesos elementales, entonces la probabilidad de un suceso  $A$  es

$$\text{Probabilidad}(A) = P(A) = \frac{1}{K} \times \text{Tamaño de } A$$

¿Cuál es la probabilidad de ver exactamente 2 cruces si tiramos una moneda equilibrada 2 veces?

¿En el ejemplo sobre la votación, es razonable pensar que todos los posibles votos son equiprobables?



## La probabilidad frecuentista

Si repetimos el experimento muchas veces, la frecuencia (relativa) con que ocurre el suceso sería una aproximación de la probabilidad

Probabilidad = el valor límite de la frecuencia

## La probabilidad subjetiva

Cada individuo tiene sus propias probabilidades que dependen de sus conocimientos y de su incertidumbre.

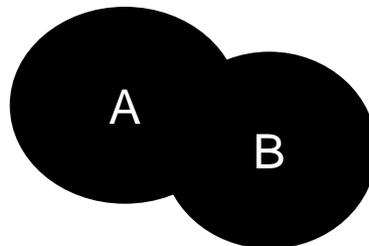
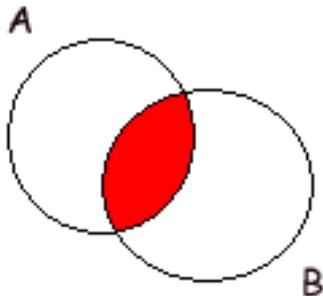
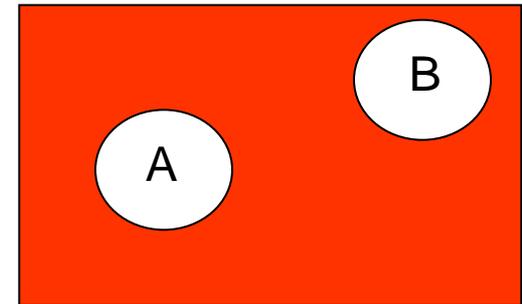
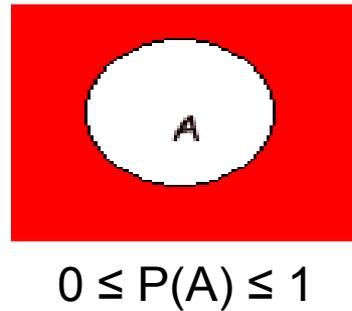
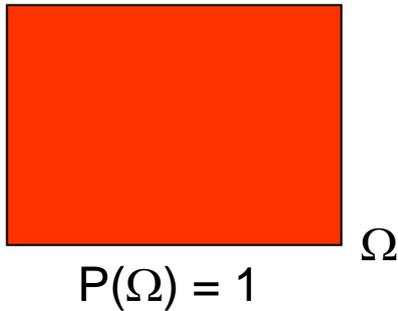
## Interpretaciones filosóficas

¡No creo en la filosofía!



## 4.3: Propiedades de la probabilidad

Las reglas que cumplen los **diagramas de Venn** son las mismas reglas que cumple la probabilidad.



¿Cómo calculamos  $P(A \text{ o } B)$ ?



- Si  $A$  es un suceso de  $\Omega$  entonces  $0 \leq P(A) \leq 1$
- Si  $A = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ , entonces  $P(A) = P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_k)$
- $P(\Omega) = 1$  y  $P(\emptyset) = 0$
- Ley del complementario:  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Ley de la adición:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si  $A$  y  $B$  son incompatibles, entonces  $P(A \cap B) = 0$  y
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



**Ejemplo:** Dada la siguiente tabla (ocupación versus ingresos familiares)

	Bajo	Medio	Alto
Ama de casa	8	26	6
Obreros	16	40	14
Ejecutivos	6	62	12
Profesionales	0	2	8

Se elige una persona de forma aleatoria. Calcular la probabilidad de:

- a) Ama de casa    b) Obrero    c) Ejecutivo    d) Profesional
- e) Ingreso bajo    f) Ingreso medio    g) Ingreso alto
- h) Ejecutivo con ingreso alto    i) Ama de casa con ingreso bajo



## 4.4: Probabilidad condicionada, la ley de la multiplicación y independencia

La **probabilidad condicionada** de A dado B es:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Otra manera de expresarla es la **ley de la multiplicación**

$$P(A \cap B) = P(A | B)P(B)$$

Repartimos 2 naipes de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos seanoros?



## Independencia

La definición formal de independencia es que A y B son independientes si:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Esto equivale de decir que  $P(A|B) = P(A)$  y significa que el hecho de que B ocurre no cambia el incertidumbre sobre A.

Igualmente, tenemos  $P(B|A) = P(B)$  y observar A no influye en la probabilidad de B.



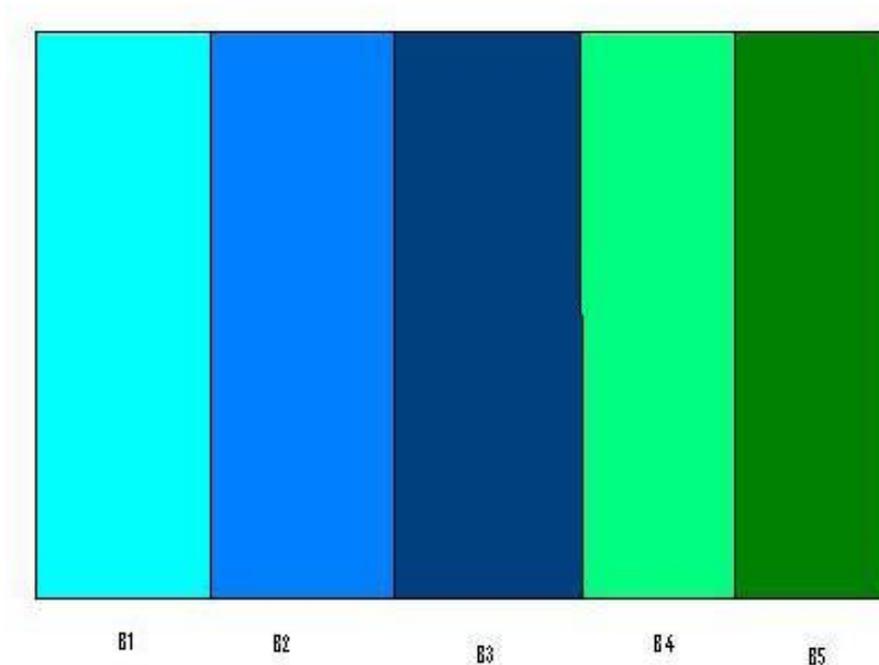
## Ejemplo

En una cadena de televisión se hizo una encuesta a 2500 personas para saber la audiencia de un debate y de una película que se emitieron en horas distintas: 2 100 vieron la película, 1 500 vieron el debate y 350 no vieron ninguno de los dos programas. Si elegimos al azar a uno de los encuestados:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que viera la película y el debate?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que viera la película, sabiendo que vio el debate?
- c) Sabiendo que vio la película, ¿cuál es la probabilidad de que viera el debate?



## 4.5: La ley de la probabilidad total y el teorema de Bayes



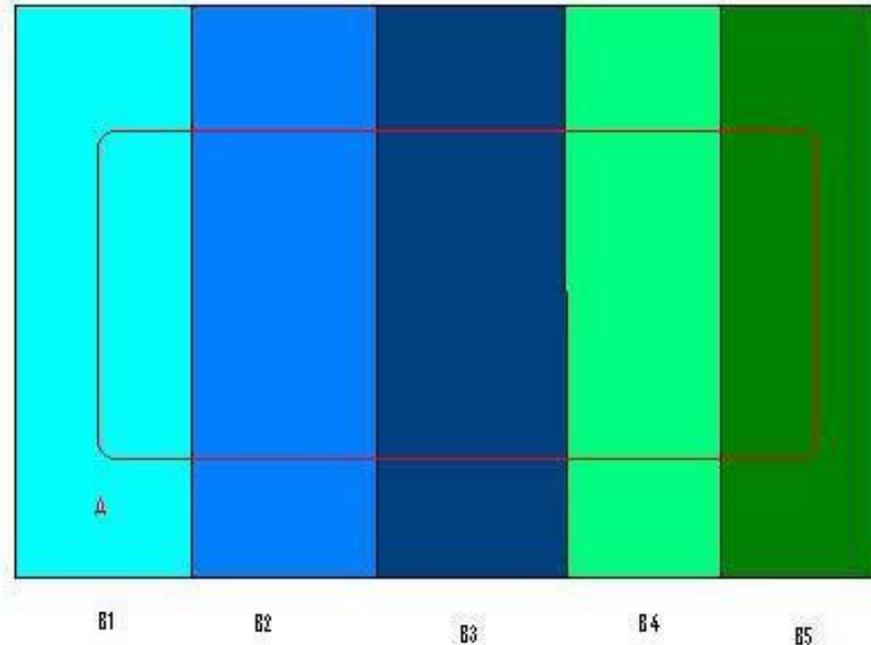
Los sucesos  $B_1, \dots, B_k$  forman una **partición** si:

$$\Omega = B_1 \text{ o } B_2 \text{ o } \dots \text{ o } B_k$$

$$B_i \text{ y } B_j = \emptyset$$



## La ley de la probabilidad total



$A \subset \Omega$ .

$A$  es un suceso:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_K) = \\ &= P(A | B_1)P(B_1) + P(A | B_2)P(B_2) + \dots + P(A | B_K)P(B_K) \end{aligned}$$



## El teorema de Bayes

Si  $A$  ha sucedido, la probabilidad de que haya sucedido  $B_i$  es:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)p(B_i)}{P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_K)P(B_K)}$$

### Ejemplo

Tenemos tres urnas: A con 3 bolas rojas y 5 negras, B con 2 bolas rojas y 1 negra y C con 2 bolas rojas y 3 negras. Escogemos una urna al azar y extraemos una bola. Si la bola ha sido roja, ¿cuál es la probabilidad de haber sido extraída de la urna A?



## Ejemplo (Pregunta de examen)

La Encuesta de Pobreza y Desigualdades Sociales (EPDS) realizada por el Gobierno Vasco viene investigando en Euskadi el fenómeno de la pobreza. El objetivo central es el conocimiento, estudio y evaluación de la pobreza, y su incidencia en Euskadi, así como la obtención de indicadores asociados de desigualdad social. En la última investigación se han clasificado los individuos en 15 grupos presentándose las proporciones correspondientes a los mismos:

- ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo viva en un hogar pobre y nunca se le agoten los alimentos?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo al que nunca se le agotan los alimentos viva en un hogar rico?
- ¿Son independientes los sucesos "se agotan los alimentos algunas veces" y "su hogar vive por encima de la media, confortable"?

Su hogar vive ...	Se agotan los alimentos ...		
	A menudo	Algunas veces	Nunca
Muy pobre	0.05	0.03	0
Pobre	0.15	0.1	0.01
Apañándose las, por debajo de la media	0.1	0.15	0.2
Por encima de la media, confortable	0.03	0.05	0.05
Rico	0	0.01	0.07



## Ejemplo (Pregunta de examen)

Según facilita el Ministerio de Sanidad hasta el momento se tiene la siguiente información sobre la vacuna de la Gripe A y contagiados:

	Contagiados	No contagiados
Vacunados	0,05	0,25
No vacunados	0,2	0,5

Si se selecciona una persona de manera aleatoria:

- Hallar la probabilidad de que se haya vacunado.
- Si no se ha vacunado, ¿cuál es la probabilidad de que se haya contagiado?



## Ejemplo (Pregunta de examen)

En una multinacional la plantilla se divide en tres categorías: directores, subdirectores y responsables de área. Los directores son el 5% de la empresa, de los cuales el 10% son mujeres. Los subdirectores suponen el 30% de los que la mitad son mujeres y de los responsables de área (el resto) el 80% son mujeres.

Si tomamos en empleado al azar en esa multinacional, ¿qué probabilidad hay de que sea mujer?

En el problema anterior, suponiendo que la persona elegida es una mujer, ¿cuál es la probabilidad de que sea directora?



## Ejemplo (Pregunta de examen)

En las recientes elecciones para el rector, los votos emitidos por los profesores de cuerpos docentes universitarios eran los siguientes :

	Luciano Parejo	Daniel Peña	Votos Nulos	Votos en Blanco
Getafe	128	130	1	11
Leganés	86	132	3	22
Colmenarejo	7	1	0	0

Si se selecciona una persona de manera aleatoria de entre los profesores quienes han votado:

- Hallar la probabilidad de que haya votado a favor de Daniel Peña.
- Sabiendo que viene de Colmenarejo, ¿cuál es la probabilidad de que haya votado a Daniel Peña?
- ¿Son independientes los sucesos “voto a favor de Daniel Peña” y “viene de Colmenarejo”? ¿Por qué?



## Ejemplo (Pregunta de Examen)

Los siguientes resultados (expresados como porcentajes) pertenecen al último sondeo del CIS del abril de 2010.

### Pregunta 3

Y, ¿cree Ud. que dentro de un año la situación económica del país será mejor, igual o peor que ahora?

Mejor	22.0
Igual	38.4
Peor	26.9
N.S.	12.3
N.C.	.3
(N)	(2479)

Suponiendo que estos resultados son representativos de la población adulta en España, la probabilidad de que 3 personas independientes piensen que la situación será peor es aproximadamente:

- a) 0,26900
- b) 0,01947
- c) 0,80700
- d) 0,05662



## Ejemplo (Pregunta de Examen)

En el sondeo de la CIS de abril de 2010, un 39% de la gente dicen que no conocen a Durán i Lleida. Se eligen dos personas al azar.

¿Cuál es la probabilidad de que exactamente uno de ellos le conozca?

- a) 0,2379
- b) 0,1521
- c) 0,3721
- d) 0,4758



## Ejemplo (Pregunta de Examen)

La siguiente tabla proporciona las evaluaciones realizadas por los ciudadanos de los ministros (en una escala de 0 a 10) del último sondeo del CIS.

Un ministro aprueba con una nota de 5 o más. *La Revista de Vallekas* decide elegir un ministro al azar para entrevistarle sobre los resultados del sondeo.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que un ministro elegido al azar esté aprobado en el sondeo?
- b) Sabiendo que se ha elegido una ministra, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado?
- c) Si se elige un ministro que ha suspendido con una nota muy mala, por debajo del 4, ¿cuál es la probabilidad de que sea varón?
- d) ¿Son independientes los sucesos “el ministro aprueba” y “el ministro es varón”? ¿Por qué?
- e) ¿Cuál es la nota media de todos los ministros?

Ministro	Sexo	Evaluación
Aído	M	3,82
Blanco	V	4,31
Caamaño	V	4,13
Chacón	M	5,06
Chaves	V	4,43
Corbacho	V	4,08
Corredor	M	3,62
Espinosa	M	4,16
de la Vega	M	5,02
Gabilondo	V	4,39
Garmendia	M	4,15
González Sinde	M	3,51
Jiménez	M	4,59
Moratinos	V	4,33
Rubalcaba	V	4,93
Salgado	M	4,51
Sebastián	V	3,94