



Tema 5.5: Contrastes de hipótesis

1. ¿Qué es un contraste de hipótesis?
2. Elementos de un contraste: hipótesis nula y alternativa, tipos de error, nivel de significación, región crítica
3. Contrastes para la media de una población normal
4. Contrastes para una proporción
5. Problemas de dos muestras

Lecturas recomendadas:

- Capítulos 22 y 23 del libro de Peña y Romo (1997)



5.5.1: ¿Qué es un contraste de hipótesis?

Una **hipótesis** es una afirmación que se hace sobre la población.

La **hipótesis es paramétrica** si se refiere a los valores que toma alguno de los parámetros poblacionales.

Por ejemplo, una hipótesis paramétrica es: “la media poblacional es positiva” ($\mu > 0$).

Un **contraste de hipótesis** es una técnica estadística para juzgar si los datos aportan evidencia o no para confirmar una hipótesis.



Ejemplo:

Después de algunas de sus decisiones recientes sobre la educación, es natural pensar que la popularidad del Ministro de Educación haya bajado.

Se midieron las valoraciones sobre el ministro Wert de 10 estudiantes hace un par de años y recientemente. Las diferencias son:

-2, -0.4, -0.7, -2, +0.4, -2.2, +1.3, -1.2, -1.1, -2.3

La mayoría de los datos son negativos, pero ¿proporcionan estos datos evidencia de que el nivel medio de popularidad del ministro haya bajado?

La media estimada a partir de los datos es $\bar{x} = -1,02$.

¿Refleja esta estimación un auténtico descenso en el nivel medio de popularidad?

¿Se debe el resultado a razones puramente aleatorias?



5.5.2: Elementos de un contraste de hipótesis

La hipótesis para la que se desea encontrar evidencia se llama **hipótesis alternativa** o **hipótesis experimental**. Se denota por H_1 . En el ejemplo:

$$H_1 : \mu < 0$$

La afirmación contraria a H_1 se llama **hipótesis nula**. Se denota por H_0 . En el ejemplo:

$$H_0 : \mu = 0$$

Como queremos confirmar si el grado medio realmente desciende, queremos contrastar: $H_0 : \mu = 0$ frente a $H_1 : \mu < 0$



El razonamiento básico para hacer un contraste es:

1. Supongamos que H_0 es cierta, $\mu = 0$.
2. Es el resultado obtenido a partir de los datos ($\bar{x} = -1.02$) extraño bajo esta hipótesis?
3. Si es así, los datos aportan evidencia contra H_0 y a favor de H_1 .

Para llevar a cabo el análisis anterior tenemos que estudiar qué valores son los que cabe esperar que tome \bar{x} cuando H_0 es cierta.

Para simplificar suponemos, de momento, que la población es normal y que la varianza es conocida y su valor es 1.



Recordamos que $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} \sim N(0, 1)$

Siendo H_0 cierta, tenemos que $\frac{\bar{X}}{1/\sqrt{N}} \sim N(0, 1)$

Para ver si la media observada es compatible con $\mu = 0$, calculamos

$$\frac{\bar{x}}{1/\sqrt{N}} = -1.02 \times \sqrt{10} \approx -3.225$$

y comparamos este valor con la distribución normal estándar.

Como -3,2255 es un valor bastante improbable para una distribución $N(0, 1)$, (mirando las tablas de la normal, se tiene $P(Z < -3.2255) < 0.001$), los datos proporcionan bastante evidencia en contra de H_0 y a favor de H_1 .



Tipos de error en un contraste de hipótesis

	Es cierta H_0	Es cierta H_1
No rechazamos H_0	Decisión correcta	Error de tipo II
Rechazamos H_0	Error de tipo I	Decisión correcta

¿Cuál de los dos errores es más serio?



El nivel de significación y la región crítica

Podemos controlar el error de tipo I fijando (a priori) el nivel de significación $\alpha = P(\text{rechazar } H_0 | H_0 \text{ es verdadero})$

Valores típicos para α son 0,1 ó 0,05 ó 0,01.

Dado el nivel de significación, la región crítica o región de rechazo es el conjunto de valores de la estadística donde se rechaza H_0 .

Sea $\alpha = 0,05$. Luego se rechazaría H_0 si

$$z = \frac{\bar{x}}{1/\sqrt{10}} < -1.64$$

Es decir, rechazaríamos si la media muestral es menor de -0,52.

Poniendo $\alpha = 0,025$ se rechazaría H_0 si $\bar{x} < -0,62$.



El p-valor

Para valores más pequeños de α , es más difícil rechazar la hipótesis nula.

El valor mínimo de α para cual se rechaza H_0 se llama el **p-valor**.

El **p-valor** se interpreta como una medida de la evidencia estadística que los datos aportan a favor de H_1 (o en contra de H_0):

Cuando el p-valor es pequeño, se considera que hay una fuerte evidencia a favor de H_1 .

En el ejemplo, $z = -3,2255$ implica que **p-valor = 0,00063**. Hay mucha evidencia en contra de H_0 y a favor de H_1 .



5.5.3: Contrastes para la media de una población normal (varianza conocida)

Contrastes unilaterales

H_0	H_1	Región de rechazo
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < z(\alpha)$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z(1 - \alpha)$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\left \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right > z(1 - \alpha/2)$

Contraste
bilateral



Cálculo en Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Estudiante	Diferencia						
2	1	-2	n		10			
3	2	-0,4	sigma		1			
4	3	-0,7						
5	4	-2	μ_0		0		$H_0: \mu=0$	
6	5	0,4						
7	6	-2,2	alfa		0,05			
8	7	1,3	z(alfa)		-1,64485	=DISTR.NORM.ESTAND.INV(0,05)	$H_1: \mu < 0$	
9	8	-1,2						
10	9	-1,1	z		-3,22552	=(B12-E5)/(E3/raiz(E2))	Cálculo del estadístico	
11	10	-2,3						
12	Media	-1,02	p-valor		0,000629	=DISTR.NORM.ESTAND(E10)	Cálculo del p-valor	

Rechazamos la hipótesis nula a favor de la hipótesis alternativa. Hay mucha evidencia de que Wert sea menos popular ahora que hace dos años.

Hemos hecho el contraste con tablas y sin Excel también. ¡**Tampoco es muy difícil!**



Computación más rápida en Excel

Podemos usar la función `prueba.z(datos; μ_0 ; σ)`.

- La función proporciona automáticamente el **p-valor** para el contraste frente a $H_1: \mu > \mu_0$
- Para $H_1: \mu < \mu_0$ utilizamos `1 - prueba.z(...)` para calcular el **p-valor**.
- Para el contraste bilateral, $H_1: \mu < \mu_0$, el **p-valor** se calcula mediante:
`2*min(prueba.z(...),1-prueba.z(...))`

En el ejemplo: Calculamos `1 - prueba.z(B2:B11;0;1) = 0,00062871`



5.5.4: Contrastes para una proporción

Contrastes unilaterales

H_0	H_1	Región de rechazo
$p = p_0$	$p < p_0$	$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} < z(\alpha)$
$p = p_0$	$p > p_0$	$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} > z(1 - \alpha)$
$p = p_0$	$p \neq p_0$	$\left \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \right > z(1 - \alpha/2)$

Contraste
bilateral



Ejemplo

En las últimas elecciones, el 40% de los madrileños votaron al PSOE. En un estudio de 100 personas, 37 de ellos dijeron que van a votar al PSOE en las siguientes elecciones.

Hallar un intervalo de confianza (95%) para la probabilidad de que una persona vote al PSOE ahora.

¿Hay alguna evidencia para decir que esta probabilidad sea distinta de 0,4? Hacer un contraste al 5% de significación.



Computación en Excel

Primero calculamos el intervalo de confianza.

	A	B	C
1	n	100	
2	X	37	
3	p (estimado)	0,37	
4			
5		0,0946	=intervalo.confianza(0,05;raiz(B3*(1-B3));B1)
6		0,2754	=B3-B5
7		0,4646	=B3+B5

El valor de 0,4 está dentro del intervalo.



Hacemos el contraste de manera formal.

Sea p la verdadera probabilidad de votar PSOE esta vez.

Especificamos las hipótesis:

$$H_0: p = 0,4$$

$$H_1: p \neq 0,4$$

	A	B	C	D	E	F
1	n	100				
2	x	37				
3	p (estimado)	0,37				
4						
5	alfa	0,05				
6	alfa/2	0,025				
7	1-alfa/2	0,975				
8	valor crítico	1,96	=DISTR.NORM.ESTAND.INV(B7)	Calculando el valor crítico		
9						
10	p0	0,4		Valor bajo H_0		
11	z	-0,6124	=(B3-B10)/raiz(B10*(1-B10)/B1)	Estadístico del contraste		
12	z	0,6124		en el caso bilateral		

No rechazamos la hipótesis nula. No hay evidencias de que la probabilidad sea distinta a 0,4.

Mirando el intervalo de confianza tenemos la misma conclusión.
¿Hay equivalencias también con contrastes sobre una media?



Ejemplo: (Pregunta de Examen)

Los datos provienen del último barómetro del CIS. Las valoraciones siguen distribuciones normales con desviaciones típicas iguales a las que aparecen en la tabla.

Rosa Díez es la más valorada en la muestra pero no llega a un 5. ¿Hay evidencias de que su verdadera valoración media entre los españoles sea por debajo del 5?

Hacer el contraste a un nivel de significación de 5%.

	Media	Desviación típica	(N)
Enrique Álvarez Sostres	2.72	2.38	(133)
Joan Baldoví Roda	3.06	2.76	(104)
Uxue Barkos	4.27	2.74	(302)
Alfred Bosch	3.69	2.78	(211)
Rosa Díez	4.33	2.50	(1594)
Josep A. Durán i Lleida	2.63	2.40	(1454)
Josu Erkoreka	2.85	2.53	(491)
Mikel Errekondo	2.50	2.67	(224)
Francisco Jorquera	3.01	2.48	(216)
Cayo Lara	3.88	2.62	(1379)
Ana María Oramas	3.43	2.50	(170)
Alfredo Pérez Rubalcaba	3.40	2.57	(2314)
Mariano Rajoy	2.81	2.69	(2372)
Carlos Salvador	2.28	2.25	(96)



Ejemplo: (Pregunta de Examen)

La siguiente tabla proviene del barómetro del CIS de abril de 2011.

PREGUNTA 2

Y, ¿cree Ud. que la situación económica actual del país es mejor, igual o peor que hace un año?

	%	(N)
Mejor	5.3	(130)
Igual	35.1	(865)
Peor	57.6	(1418)
N.S.	1.7	(42)
N.C.	0.3	(8)
TOTAL	100.0	(2463)

Más de un 50% de los encuestados piensan que la situación económica empeoró en 2011, pero ¿hay evidencias reales de que la proporción de españoles que lo piensan sea distinta de 50%?

Hacer el contraste a un nivel de significación de 5%.

¿Y si hacemos un intervalo de confianza? ¿El valor de 50% cae dentro?



Ejemplo: (Pregunta de Examen)

La siguiente noticia apareció en *La Razón*, el 9 de diciembre de 2009.

Una encuesta sostiene por primera vez que los catalanes quieren la independencia

Un 50,3% de los catalanes votarían a favor de la independencia de Cataluña y sólo un 17,8% votaría en contra en el caso de que esta comunidad celebrase un referéndum democrático de autodeterminación, según un estudio de la Universitat Oberta de Catalunya (UOC) dirigido por Miquel Strubell.

El estudio se ha realizado mediante encuesta telefónica a 2.614 personas, de entre 15 y 74 años que residen en Cataluña, y basándose en una muestra aleatoria estratificada en seis veguerías. Ésta es la primera vez que un sondeo de estas características apunta a una victoria soberanista, aunque condicionada a la participación.

Preguntadas por la decisión que tomarían en el caso de que en Cataluña se celebrase un referéndum de autodeterminación, un 50,3% de las personas entrevistadas votarían a favor de esta consulta, mientras que **un 24,6% se abstendrían**, un 17,8% votaría en contra y un 7,2% no sabe o no contesta.

A pesar de estas cifras, **un 58,1% de los encuestados cree que Cataluña no llegará a ser independiente**, frente al 31,1% que lo ven posible.

¿Existen evidencias reales de que menos de un 60% de los Catalanes creen que Cataluña no llegará a ser independiente? Hacer el contraste a un nivel de significación de 5%.



Ejemplo: (Pregunta de Examen)

La siguiente tabla proviene del Barómetro del Real Instituto Elcano (BRIE) de marzo-abril 2012. Los resultados provienen de una muestra de 1000 españoles adultos.

1. CONDENA UNÁNIME DE LA NACIONALIZACIÓN DE REPSOL-YPF EN ARGENTINA

- Como consecuencia de los acontecimientos recientes, el **90%** de los españoles considera muy grave la nacionalización de Repsol-YPF por el gobierno argentino. Y en este mismo sentido valora las trabas a otras empresas inversoras españolas en el país.

¿Cómo valoraría la situación creada por la nacionalización de Repsol-YPF por parte de Argentina?

Muy grave	Bastante grave	Algo grave	Poco grave	Nada grave	NS	NC
14,2%	40,7%	27,7%	5,3%	2,9%	8,0%	1,2%

- Uno de cada dos españoles cree que las relaciones diplomáticas entre España y Argentina empeorarán como consecuencia de estas tensiones.

¿Y cómo cree que afectará a las relaciones entre España y Argentina?

Mejorarán	Seguirán igual	Empeorarán	NS	NC
11,8%	34,7%	44,1%	8,2%	1,2%

¿Hay evidencias reales de que más de un 40% de los españoles adultos piensen que las relaciones entre España y Argentina vayan a empeorar?



Material Adicional



Contrastes para la media de una población normal (varianza desconocida)

Contrastes unilaterales

H_0	H_1	Región de rechazo
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} < t_{n-1}(\alpha)$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_{n-1}(1 - \alpha)$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\left \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \right > t_{n-1}(1 - \alpha/2)$

Contraste
bilateral



Computación en Excel

Volvemos al ejemplo de Wert, suponiendo que la varianza es desconocida.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Estudiante	Diferencia					
2	1	-2					
3	2	-0,4	n	10			
4	3	-0,7	s	1,19610479			
5	4	-2					
6	5	0,4	μ_0	0			$H_0: \mu = 0$
7	6	-2,2					
8	7	1,3	alpha	0,05			
9	8	-1,2	$t_{n-1}(\alpha)$	0,06429815	DISTR.T.INV(0,95;9)		$H_1: \mu < \mu_0$
10	9	-1,1					
11	10	-2,3	t	-2,69668949	(B12-E6)/(E4/raiz(E3))		calculando el estadístico
12	Media	-1,02	p-valor	0,01226316	DISTR.T(-E11;9;1)		calculando el p-valor
13							

Todavía rechazamos H_0 , pero el cálculo es más lioso.



5.5.5: Problemas con dos muestras

Supongamos que queremos contrastar la diferencia en las medias de 2 poblaciones normales. Consideramos 4 situaciones distintas.

1. Muestras emparejadas
2. Dos muestras con varianzas conocidas
3. Varianzas desconocidas pero iguales
4. Varianzas desconocidas



Muestras emparejadas

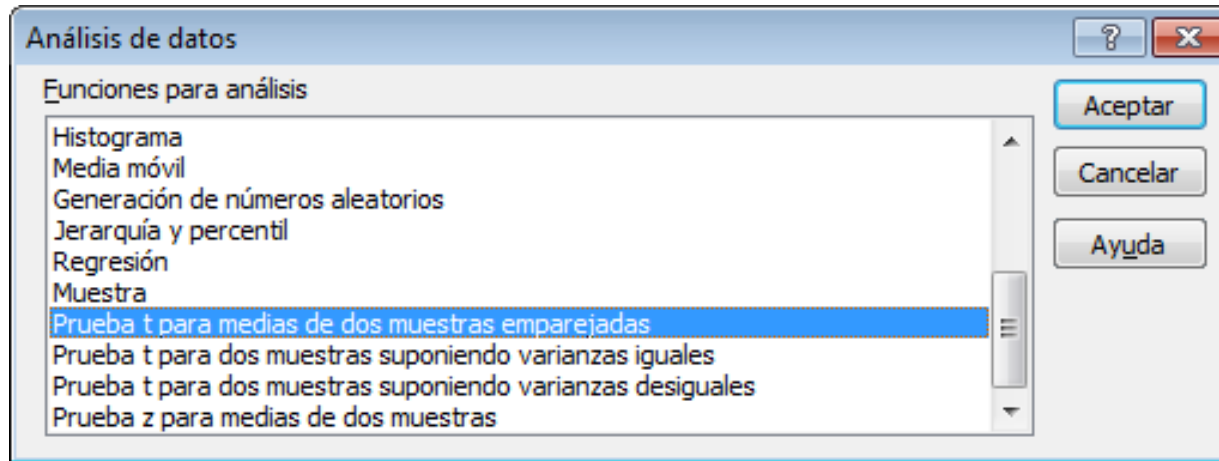
Volvemos al ejemplo de los banqueros. Supongamos que queremos contrastar si el sueldo medio de los banqueros ha crecido en 2013

Banquero	Año	
	2012	2013
1	1300	1200
2	1100	1000
3	1200	1500
4	900	800
5	800	750
6	2000	2400
7	1100	1000
8	1500	1600
9	700	700
10	500	600

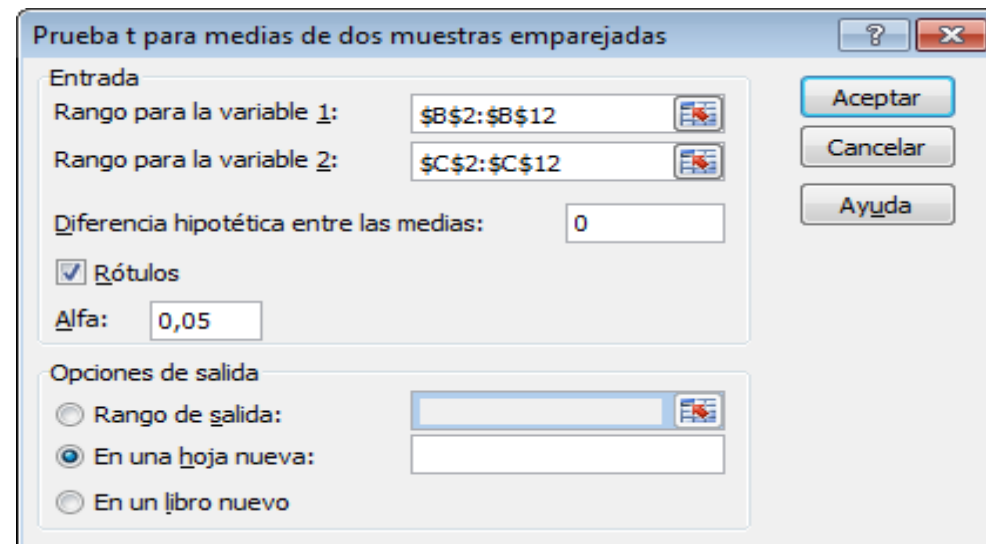
El análisis es fácil en Excel.



Usamos una prueba t de dos muestras emparejadas



Fijamos $H_0: \mu_{2012} - \mu_{2013} = 0$
y $H_1: \mu_{2012} - \mu_{2013} < 0$





Prueba t para medias de dos muestras emparejadas

	2012	2013
Media	1110,00	1155,00
Varianza	185444,44	302472,22
Observaciones	10,00	10,00
Coefficiente de correlación de Pearson	0,962	
Diferencia hipotética de las medias	0,000	
Grados de libertad	9,000	
Estadístico t	-0,790	
P(T<=t) una cola	0,225	
<u>Valor crítico de t (una cola)</u>	1,833	
P(T<=t) dos colas	0,450	
Valor crítico de t (dos colas)	2,262	

El **estadístico t** se basa en la diferencia de las medias muestrales

Si H_0 es falso, esperamos ver valores negativos del estadístico.

La probabilidad de observar un estadístico bajo H_0 es 22,5%.

¡Ojo! El valor crítico es -1,833. (Excel sólo pone el valor asociado con H_1 : diferencia > 0)

Luego, no rechazamos H_0 . No hay suficiente evidencia para sugerir que el sueldo medio de los banqueros haya crecido.