MÉTODOS ESTADÍSTICOS PARA LA MEJORA DE LA CALIDAD

Profesor: Ismael Sánchez
Departamento de Estadística y Econometría
Universidad Carlos III de Madrid

Capítulo 5: Gráficos de Control con Memoria

5.1 Introducción

5.2 Gráfico CUSUM

5.3 Gráfico EWMA

5.4 Gráfico de Medias Móviles

Capítulo 5: Gráficos de Control con Memoria

5.1 Introducción

5.2 Gráfico CUSUM

5.3 Gráfico EWMA

5.4 Gráfico de Medias Móviles

5.1 Introducción

Supongamos que x es una característica de calidad que si el proceso está bajo control verifica que

$$\begin{aligned} E(x) &= \mu \\ \mathrm{Var}(x) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

5.1 Introducción

Supongamos que x es una característica de calidad que si el proceso está bajo control verifica que

$$\begin{aligned} E(x) &= \mu \\ \mathrm{Var}(x) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Gráficos de Control por Variables

Gráficos de Control por Atributos

Muy útiles para detectar cambios en la media de más de 2 desviaciones típicas $|\mu' - \mu| \geq 2\sigma$

5.1 Introducción

Supongamos que x es una característica de calidad que si el proceso está bajo control verifica que

$$
\begin{aligned}
E(x) &= \mu \\
\mathrm{Var}(x) &= \sigma^2
\end{aligned}
$$

Gráficos de Control por Variables

Gráficos de Control por Atributos

Muy útiles para detectar cambios en la media de más de 2 desviaciones típicas $|\mu' - \mu| \geq 2\sigma$

Pero pueden tardar mucho en detectar un cambio más pequeño

5.1 Introducción

Supongamos que x es una característica de calidad que si el proceso está bajo control verifica que

$$\begin{aligned} E(x) &= \mu \\ \mathrm{Var}(x) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Gráficos de Control con Memoria

- CUSUM
- EWMA
- Medias Móviles...

Son más rápidos en detectar un cambio pequeño, $|\mu' - \mu| < 2\sigma$

pero más lentos en detectar un cambio grande $|\mu' - \mu| \geq 2\sigma$

Supongamos que x es una característica de calidad que si el proceso está bajo control verifica que

$$\begin{aligned} E(x) &= \mu \\ \mathrm{Var}(x) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Supongamos que x es una característica de calidad que si el proceso está bajo control verifica que

$$\begin{aligned} E(x) &= \mu \\ \mathrm{Var}(x) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Gráfico de Control por Variables:

evolución de $x_1, x_2, x_3, \ldots$ (bien con observaciones individuales o muestras independientes -mutuamente excluyentes-)

Supongamos que x es una característica de calidad que si el proceso está bajo control verifica que

$$\begin{aligned} E(x) &= \mu \\ \mathrm{Var}(x) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Gráfico de Control por Variables:

evolución de $x_1, x_2, x_3, \ldots$ (bien con observaciones individuales o muestras independientes -mutuamente excluyentes-)

Gráfico de Control con Memoria:

evolución de $f(x_1), f(x_1, x_2), f(x_1, x_2, x_3), f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$

La información se va acumulando...

Supongamos que x es una característica de calidad que si el proceso está bajo control verifica que

$$\begin{aligned} E(x) &= \mu \\ \mathrm{Var}(x) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Gráfico de Control por Variables:

evolución de $x_1, x_2, x_3, \ldots$ (bien con observaciones individuales o muestras independientes -mutuamente excluyentes-)

Gráfico de Control con Memoria:

evolución de $f(x_1), f(x_1, x_2), f(x_1, x_2, x_3), f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$

La información se va acumulando...

... un pequeño desajuste acaba detectándose

Capítulo 5: Gráficos de Control con Memoria

5.2 Gráficos CUSUM

Vamos a ver dos tipos:
- CUSUM algorítmico
- Plantilla V

5.2 Gráficos CUSUM

Vamos a ver dos tipos:
- CUSUM algorítmico
- Plantilla V

Sea x la variable de calidad de interés

En estado de control... ⇒ $x_i \sim N(\mu_0, \sigma^2)$

5.2 Gráficos CUSUM

Vamos a ver dos tipos:
- CUSUM algorítmico
- Plantilla V

Sea x la variable de calidad de interés

En estado de control... $x_i \sim N(\mu_0, \sigma^2)$

Construimos el siguiente estadístico C_i para acumular la información:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= (x_1 - \mu_0) \\
C_2 &= (x_1 - \mu_0) + (x_2 - \mu_0) = C_1 + (x_2 - \mu_0) \\
&\vdots \\
C_i &= (x_1 - \mu_0) + (x_2 - \mu_0) + \cdots + (x_i - \mu_0) \\
&= C_{i-1} + (x_i - \mu_0)
\end{aligned}
$$

5.2 Gráficos CUSUM

Vamos a ver dos tipos:
- CUSUM algorítmico
- Plantilla V

Sea x la variable de calidad de interés

En estado de control... ⇨ $x_i \sim N(\mu_0, \sigma^2)$

Construimos el siguiente estadístico C_i pa

la información:

$$C_1 = (x_1 - \mu_0)$$

$$C_2 = (x_1 - \mu_0) + (x_2 - \mu_0) = \quad (x_2 - \mu_0)$$

$$\vdots$$

$$C_i = (x_1 - \mu_0) + (x_2 - \mu_0) + \cdots + (x_i - \mu_0)$$

$$= C_{i-1} + (x_i - \mu_0)$$

Acumulación de desviaciones

5.2 Gráficos CUSUM

Los gráficos CUSUM se basan en la evolución de C_i

5.2 Gráficos CUSUM

Los gráficos CUSUM se basan en la evolución de C_i

Si el proceso está bajo control $\Rightarrow$ $E(x) = \mu_0$

5.2 Gráficos CUSUM

Los gráficos CUSUM se basan en la evolución de C_i

Si el proceso está bajo control $\Rightarrow$ $E(x) = \mu_0$

$$E(C_i) = E[(x_1-\mu_0)+(x_2-\mu_0)+\cdots+(x_i-\mu_0)] = E\left[\sum_{j=1}^{i}(x_j-\mu_0)\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{i} E(x_j-\mu_0) = \sum_{j=1}^{i} E(x_j) - \sum_{j=1}^{i}\mu_0 = i\mu_0 - i\mu_0 = 0$$

$E(x_j) = \mu_0$

5.2 Gráficos CUSUM

Los gráficos CUSUM se basan en la evolución de C_i

Si el proceso está bajo control $\Rightarrow$ $E(x)$

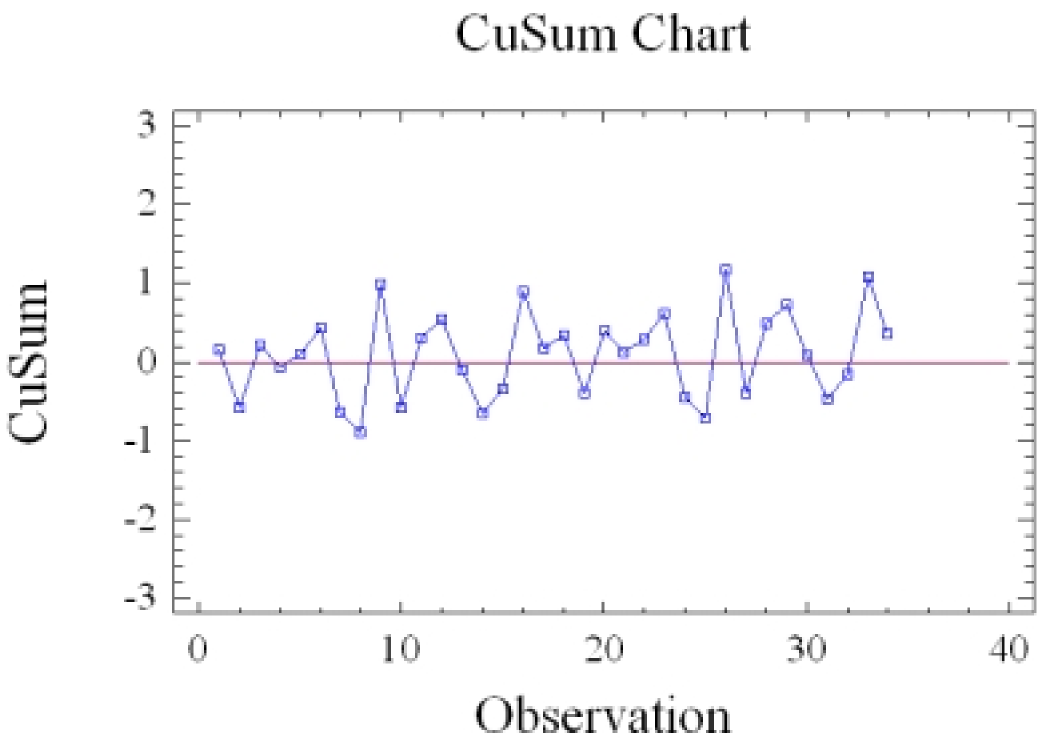
Ci evoluciona alrededor del cero

$$E(C_i) = E[(x_1-\mu_0)+(x_2-\mu_0)+\cdots+(x_i-\mu_0)] = E\left[\sum_{j=1}^{i}(x_j-\mu_0)\right]$$

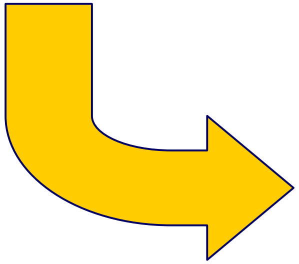
$$= \sum_{j=1}^{i} E(x_j-\mu_0) = \sum_{j=1}^{i} E(x_j) - \sum_{j=1}^{i}\mu_0 = i\mu_0 - i\mu_0 = 0$$

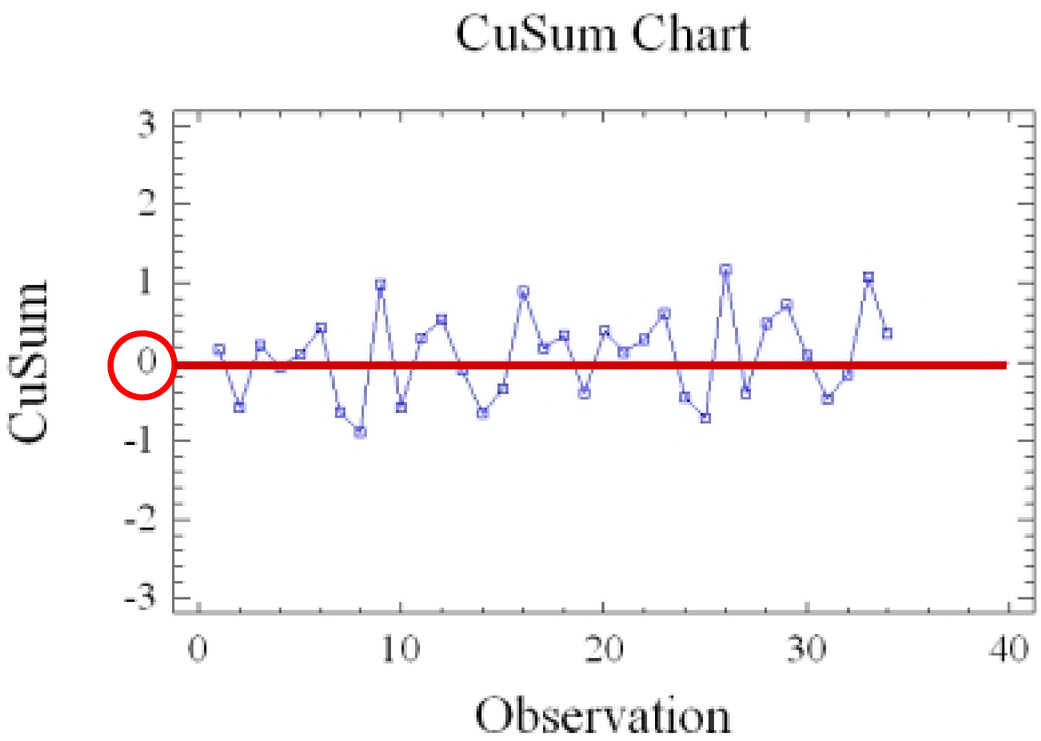
$$E(x_j) = \mu_0$$

... por tanto, si el proceso está bajo control, C_i evoluciona de forma aleatoria alrededor de una horizontal de nivel cero



... por tanto, si el proceso está bajo control, C_i evoluciona de forma aleatoria alrededor de una horizontal de nivel cero





5.2 Gráficos CUSUM

Por el contrario, si el proceso se desajusta y la media pasa a valer... $E(x) = \mu_0 + k$

5.2 Gráficos CUSUM

Por el contrario, si el proceso se desajusta y la media pasa a valer... $E(x) = \mu_0 + k$

$$E(C_i) = E[(x_1 - \mu_0) + (x_2 - \mu_0) + \cdots + (x_i - \mu_0)] = E\left[\sum_{j=1}^{i}(x_j - \mu_0)\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{i} E(x_j - \mu_0) = \sum_{j=1}^{i} E(x_j) - \sum_{j=1}^{i} \mu_0 = i(\mu_0 + k) - i\mu_0 = ik$$

$$E(x_j) = \mu_0 + k$$

5.2 Gráficos CUSUM

Por el contrario, si el proceso se desajus
a valer... $E(x) = \mu_0 + k$

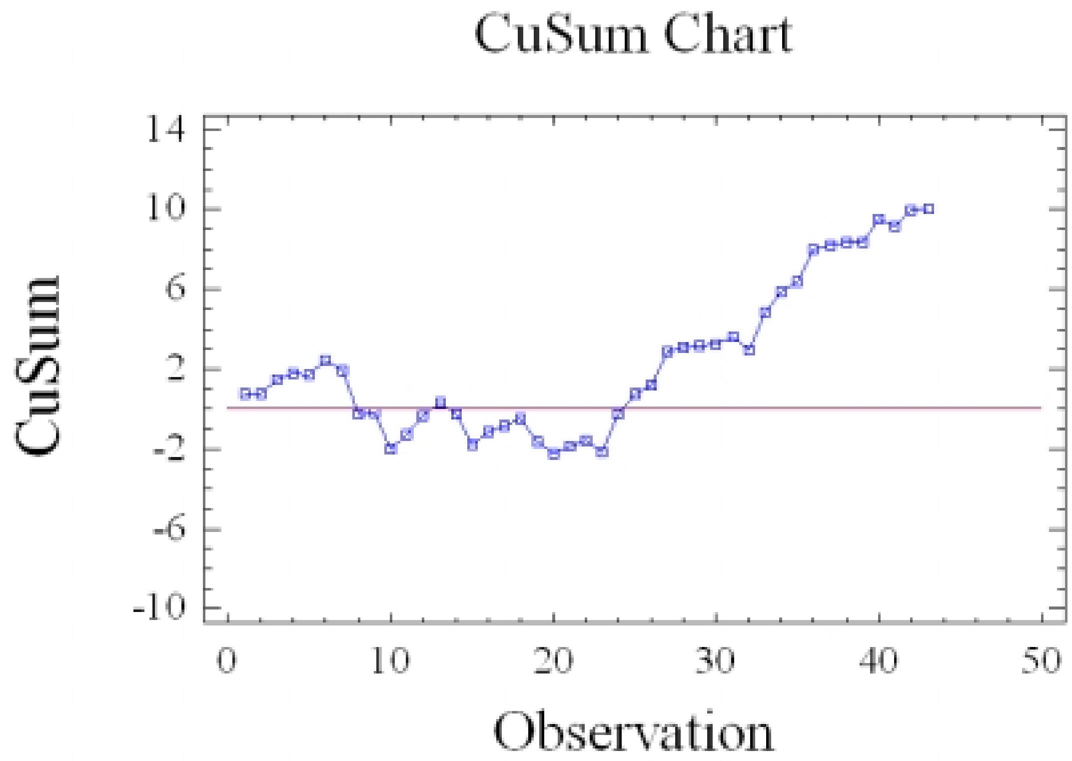
Aparece una tendencia lineal, creciente si k>0, o decreciente si k<0

$$E(C_i) = E[(x_1 - \mu_0) + (x_2 - \mu_0) + \cdots + (x_i - \mu_0)] = E\left[\sum_{j=1}^{i}(x_j - \mu_0)\right]$$

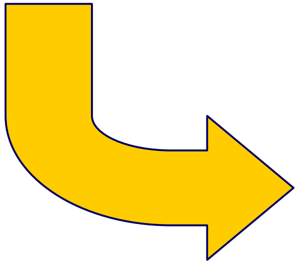
$$= \sum_{j=1}^{i} E(x_j - \mu_0) = \sum_{j=1}^{i} E(x_j) - \sum_{j=1}^{i} \mu_0 = i(\mu_0 + k) - i\mu_0 = ik$$

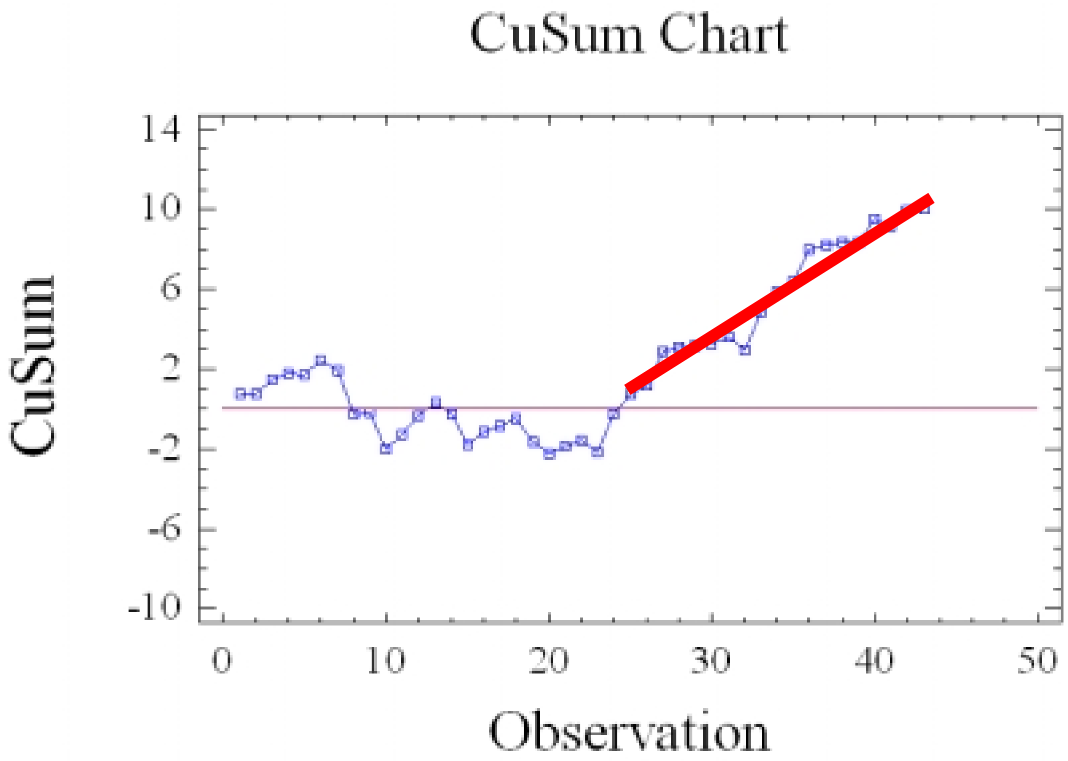
$$E(x_j) = \mu_0 + k$$

... por tanto, si el proceso se desajusta, C_i evoluciona de forma aleatoria alrededor de una pendiente



... por tanto, si el proceso se desajusta, C_i evoluciona de forma aleatoria alrededor de una pendiente





5.2 Gráficos CUSUM

CUSUM Algorítmico:

Este gráfico CUSUM tiene las siguientes particularidades:

- Dibuja por separado las desviaciones positivas (aumentos en la media del proceso) y las negativas (disminuciones en la media del proceso)
- Sólo tiene en cuenta desviaciones que superen cierto umbral mínimo

5.2 Gráficos CUSUM

CUSUM Algorítmico:

Monitoriza la evolución de los siguientes estadísticos

$$C_i^+ = \max[0, \{C_{i-1}^+ + (x_i - \mu_0)\} - K].$$

$$C_i^- = \max[0, \{C_{i-1}^- - (x_i - \mu_0)\} - K].$$

5.2 Gráficos CUSUM

CUS

Para detectar aumentos en la media

ución de los siguientes estadísticos

$$C_i^+ = \max[0, \{C_{i-1}^+ + (x_i - \mu_0)\} - K].$$

$$C_i^- = \max[0, \{C_{i-1}^- - (x_i - \mu_0)\} - K].$$

Para detectar disminuciones en la media

5.2 Gráficos CUSUM

CUSUM Algorítmico:

Monitoriza la evolución de los siguientes estadísticos

$$C_i^+ = \max[0, \underline{\{C_{i-1}^+ + (x_i - \mu_0)\} - K}].$$

$$C_i^- = \max[0, \underline{\{C_{i-1}^- - (x_i - \mu_0)\} - K}].$$

Sólo computa desviaciones que superen el umbral K

5.2 Gráficos CUSUM

CUSUM

Mo

El valor del umbral K determina la sensibilidad del gráfico. Para detectar el desajuste $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$, se suele tomar

$$K = \frac{\delta}{2}\sigma = \frac{|\mu_0 - \mu_1|}{2}.$$

$$C_i^+ = \max[0, \{C_{i-1}^+ + (x_i - \mu_0)\} - K].$$

$$C_i^- = \max[0, \{C_{i-1}^- - (x_i - \mu_0)\} - K].$$

Ejemplo con $\mu_0 = 25$ y con $K = 2.5$

		Desviaciones positivas		Desviaciones negativas	
Observación	Tiempo x_i	$C_{i-1}^{+} + (x_i - 25)$	C_i^{+}	$C_{i-1}^{-} - (x_i - 25)$	C_i^{-}
1	26.1	1.1	0	-1.1	0
2	19.9	-5.1	0	5.1	2.6
3	21.2	-3.8	0	6.4	3.9

Valor de la variable de interés

Ejemplo con $\mu_0 = 25$ y con $K = 2.5$

Observación	Tiempo x_i	Desviaciones positivas $C_{i-1}^+ + (x_i - 25)$	C_i^+	Desviaciones negativas $C_{i-1}^- - (x_i - 25)$	C_i^-
1	26.1	1.1	0	-1.1	0
2	19.9	-5.1	0	5.1	2.6
3	21.2	-3.8	0	6.4	3.9

26.1-25=1.1 (C_0^+=0)

Ejemplo con $\mu_0 = 25$ y con $K = 2.5$

		Desviaciones positivas		Desviaciones negativas	
Observación	Tiempo x_i	$C^+_{i-1} + (x_i - 25)$	C^+_i	$C^-_{i-1} - (x_i - 25)$	C^-_i
1	26.1	1.1	0	-1.1	0
2	19.9	-5.1	0	5.1	2.6
3	21.2	-3.8	0	6.4	3.9

Max[0,(1.1-2.5)}]=0

Ejemplo con $\mu_0 = 25$ y con $K = 2.5$

Observación	Tiempo x_i	Desviaciones positivas $C^+_{i-1} + (x_i - 25)$	C^+_i	Desviaciones negativas $C^-_{i-1} - (x_i - 25)$	C^-_i
1	26.1	1.1	0	-1.1	0
2	19.9	-5.1	0	5.1	2.6
3	21.2	-3.8	0	6.4	3.9

Valor de la variable de interés

Ejemplo con $\mu_0 = 25$ y con $K = 2.5$

Observación	Tiempo x_i	Desviaciones positivas $C_{i-1}^{+} + (x_i - 25)$	C_i^{+}	Desviaciones negativas $C_{i-1}^{-} - (x_i - 25)$	C_i^{-}
1	26.1	1.1	0	-1.1	0
2	19.9	-5.1	0	5.1	2.6
3	21.2	-3.8	0	6.4	3.9

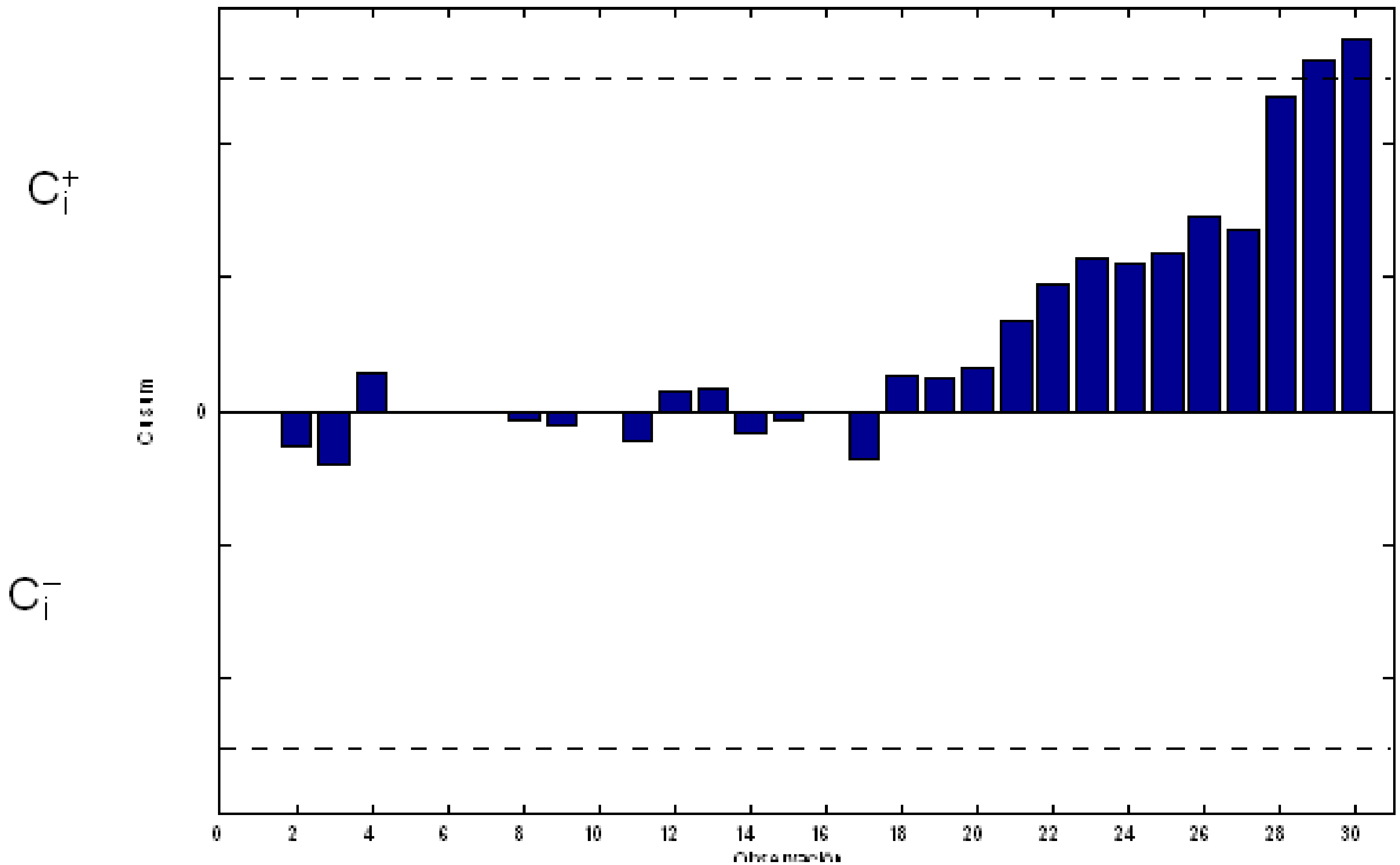
0+(19.9-25)=-5.1

Ejemplo con $\mu_0 = 25$ y con $K = 2.5$

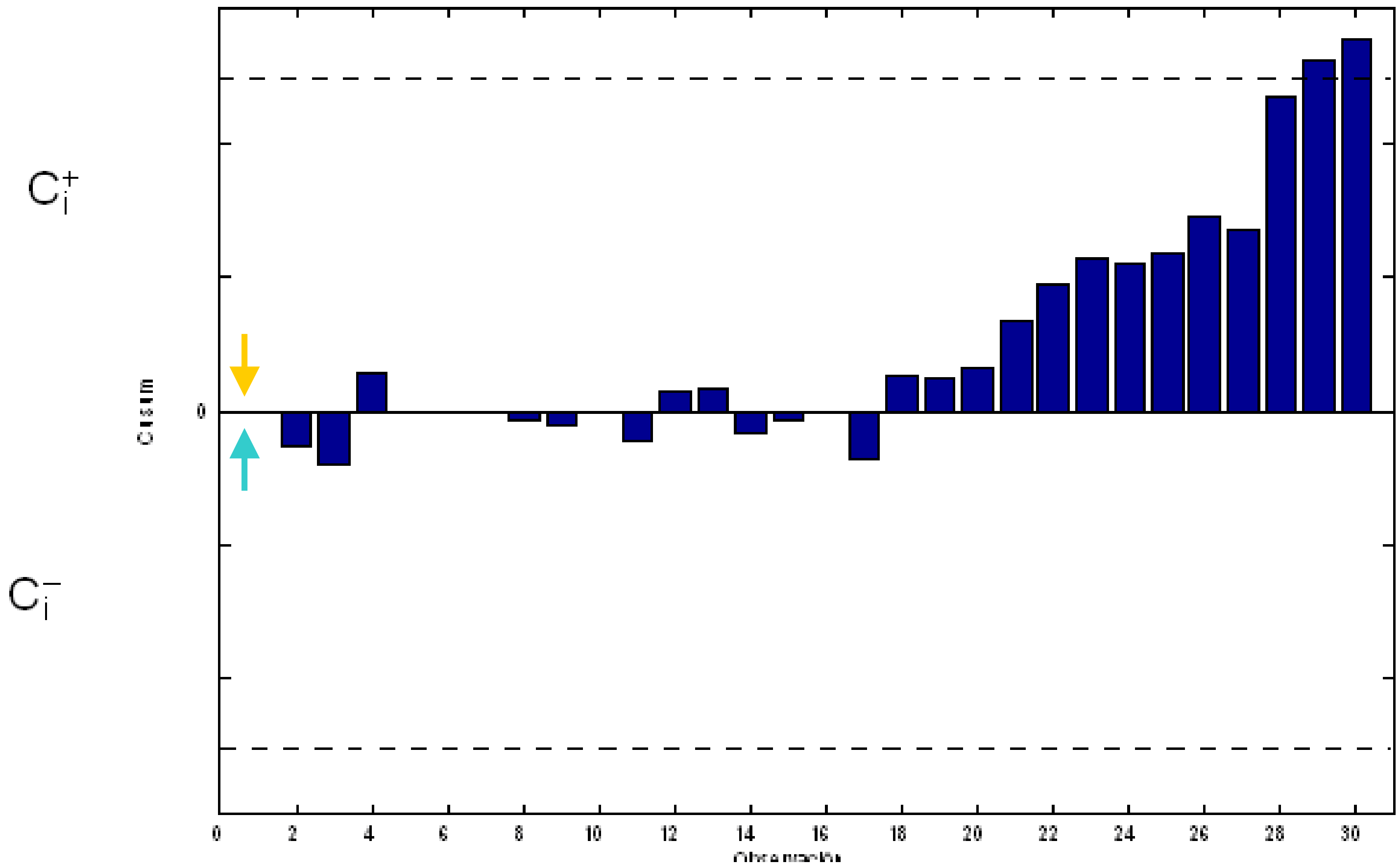
Observación	Tiempo x_i	Desviaciones positivas $C_{i-1}^{+} + (x_i - 25)$	C_i^{+}	Desviaciones negativas $C_{i-1}^{-} - (x_i - 25)$	C_i^{-}
1	26.1	1.1	0	-1.1	0
2	19.9	-5.1	0	5.1	2.6
3	21.2	-3.8	0	6.4	3.9

Max[0,(-5.1-2.5)}]=0

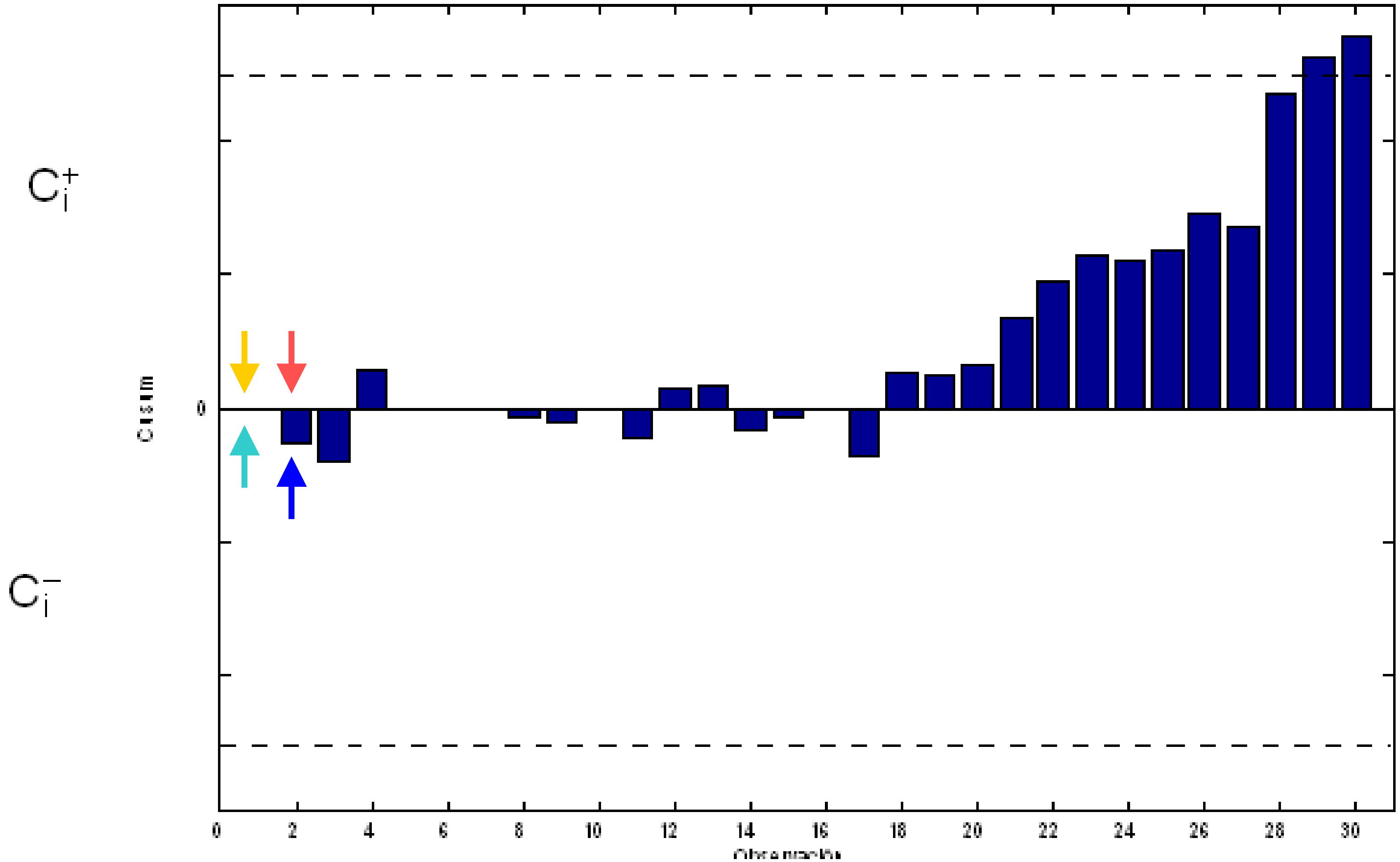
Observación	Tiempo x_i	Desviaciones positivas $C_{i-1}^+ + (x_i - 25)$	C_i^+	Desviaciones negativas $C_{i-1}^- - (x_i - 25)$	C_i^-
1	26.1	1.1	0	-1.1	0
2	19.9	-5.1	0	5.1	2.6
3	21.2	-3.8	0	6.4	3.9



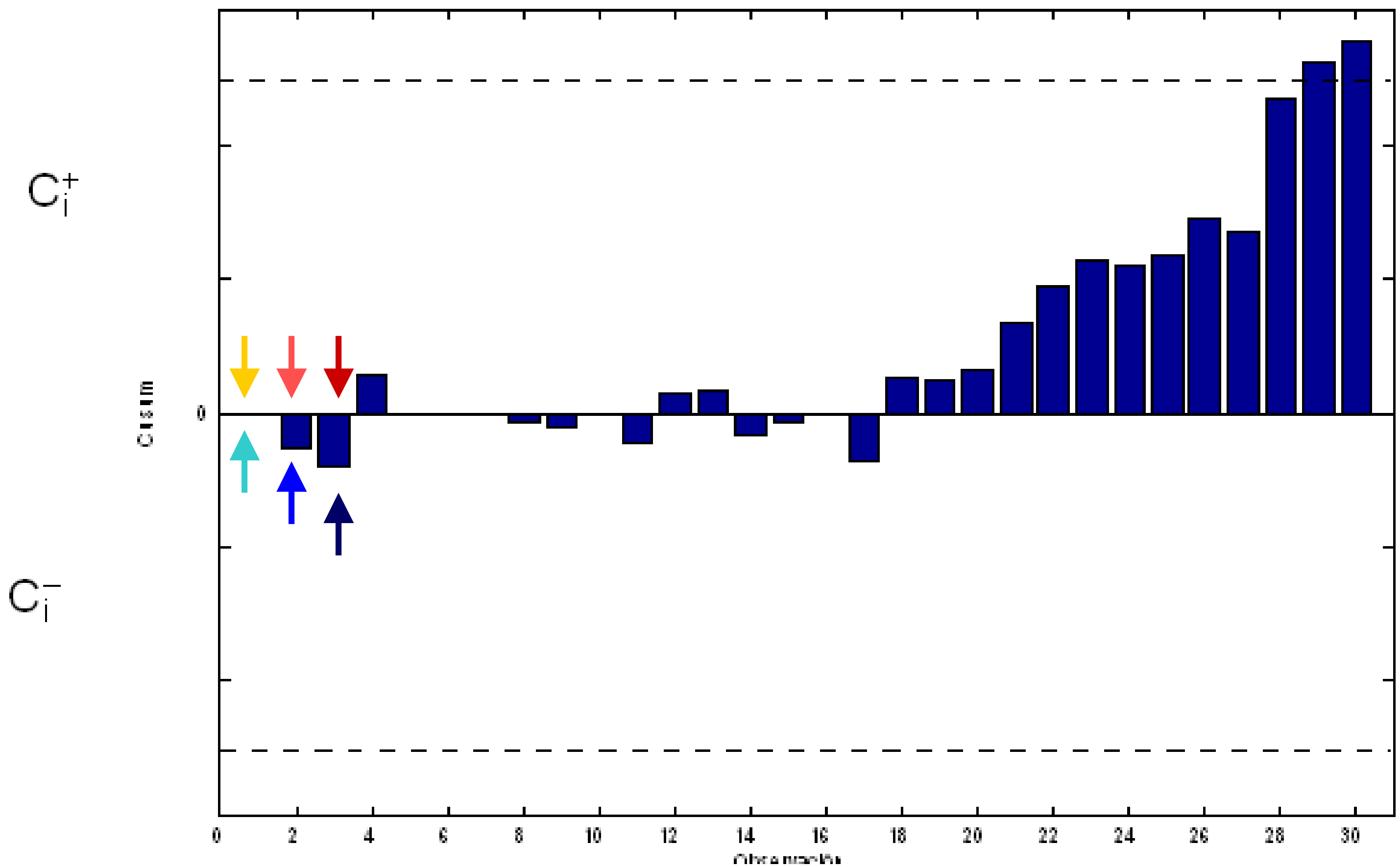
		Desviaciones positivas		Desviaciones negativas	
Observación	Tiempo x_i	$C_{i-1}^{+} + (x_i - 25)$	C_i^{+}	$C_{i-1}^{-} - (x_i - 25)$	C_i^{-}
1	26.1	1.1	0	-1.1	0
2	19.9	-5.1	0	5.1	2.6
3	21.2	-3.8	0	6.4	3.9



Observación	Tiempo x_i	Desviaciones positivas $C^+_{i-1} + (x_i - 25)$	C^+_i	Desviaciones negativas $C^-_{i-1} - (x_i - 25)$	C^-_i
1	26.1	1.1	0	-1.1	0
2	19.9	-5.1	0	5.1	2.6
3	21.2	-3.8	0	6.4	3.9



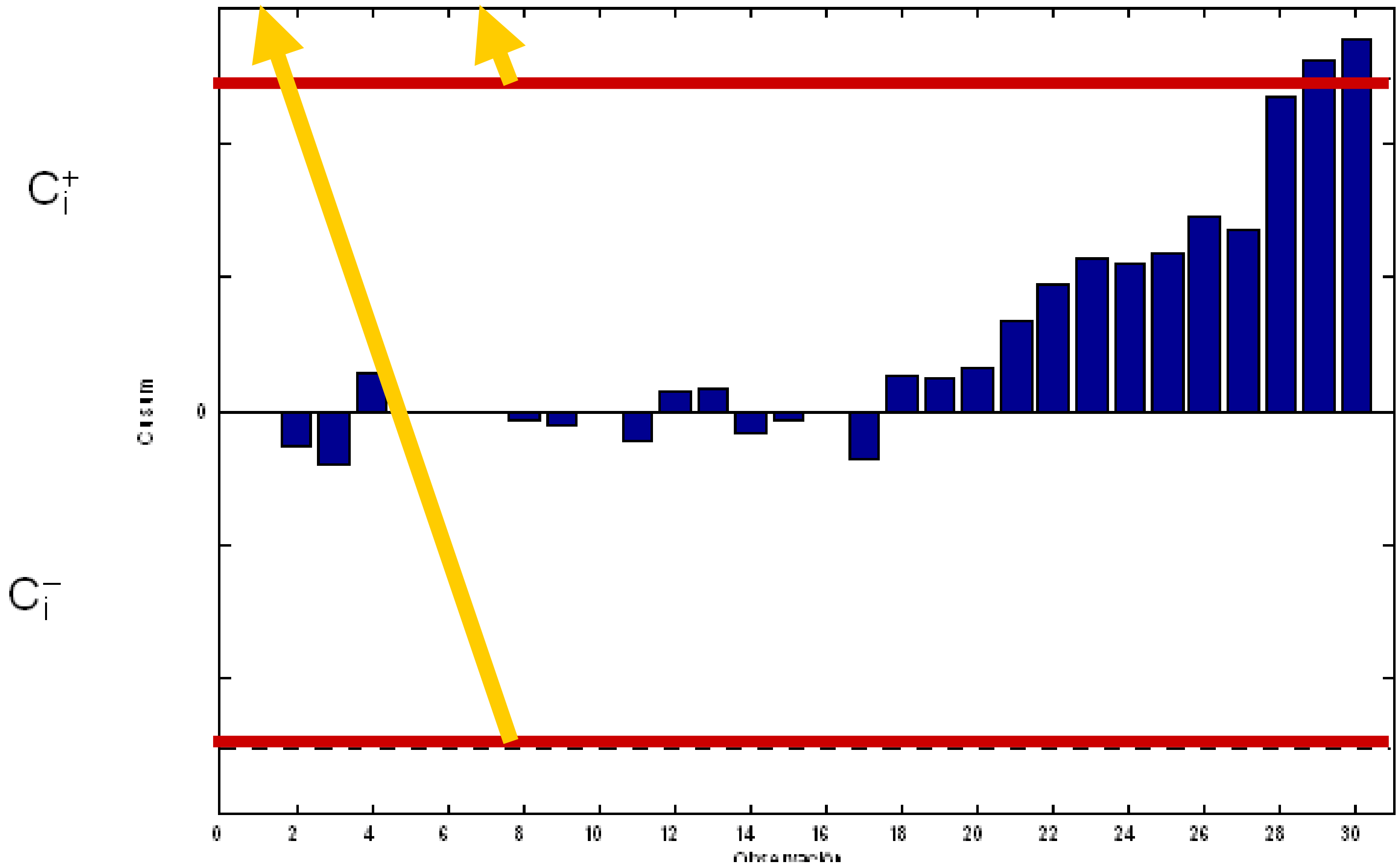
		Desviaciones positivas		Desviaciones negativas	
Observación	Tiempo x_i	$C_{i-1}^{+} + (x_i - 25)$	C_i^{+}	$C_{i-1}^{-} - (x_i - 25)$	C_i^{-}
1	26.1	1.1	0	-1.1	0
2	19.9	-5.1	0	5.1	2.6
3	21.2	-3.8	0	6.4	3.9



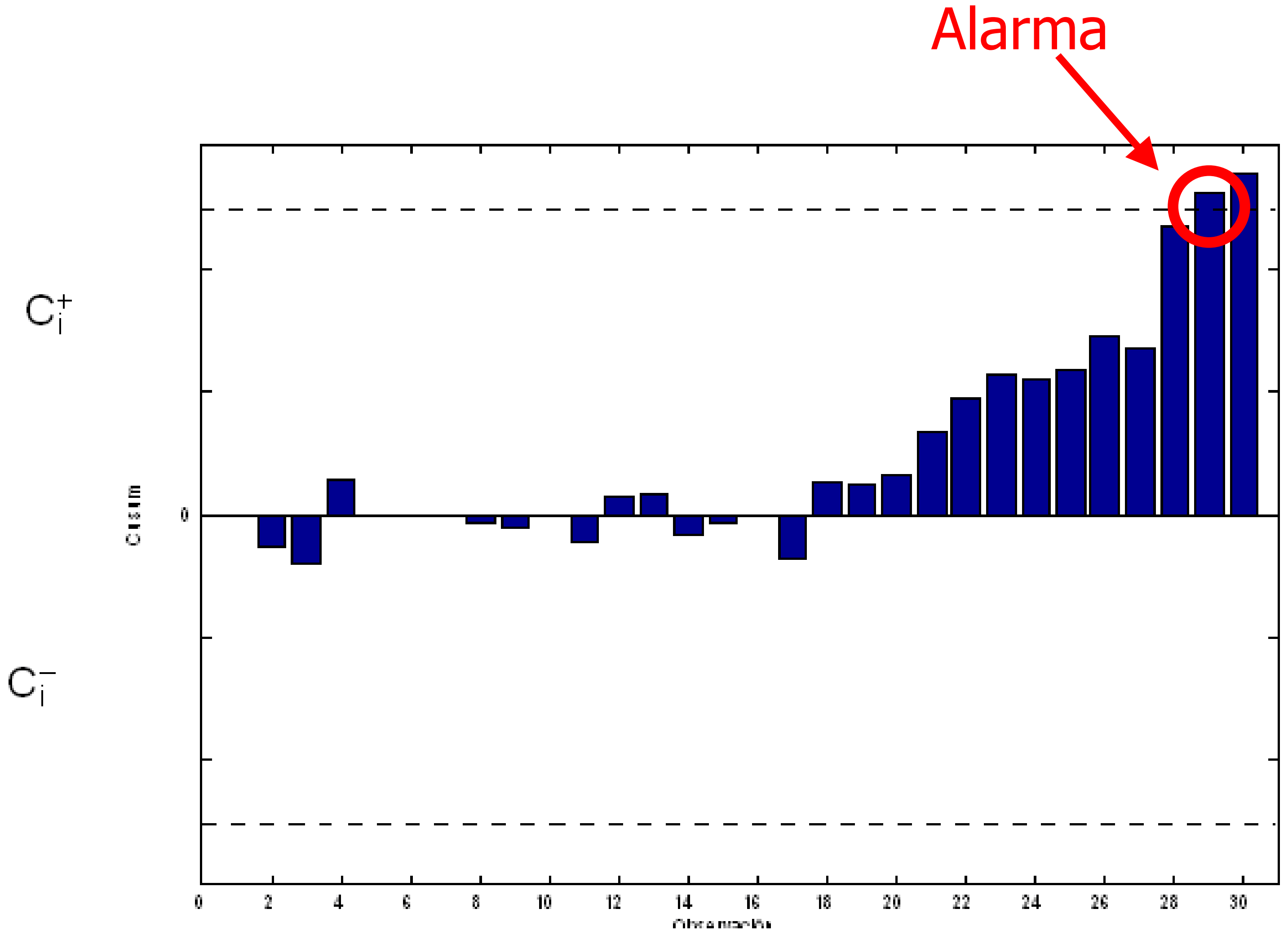
Los límites de control se ponen a distancia $H = h\sigma$

Generalmente $h = 5$

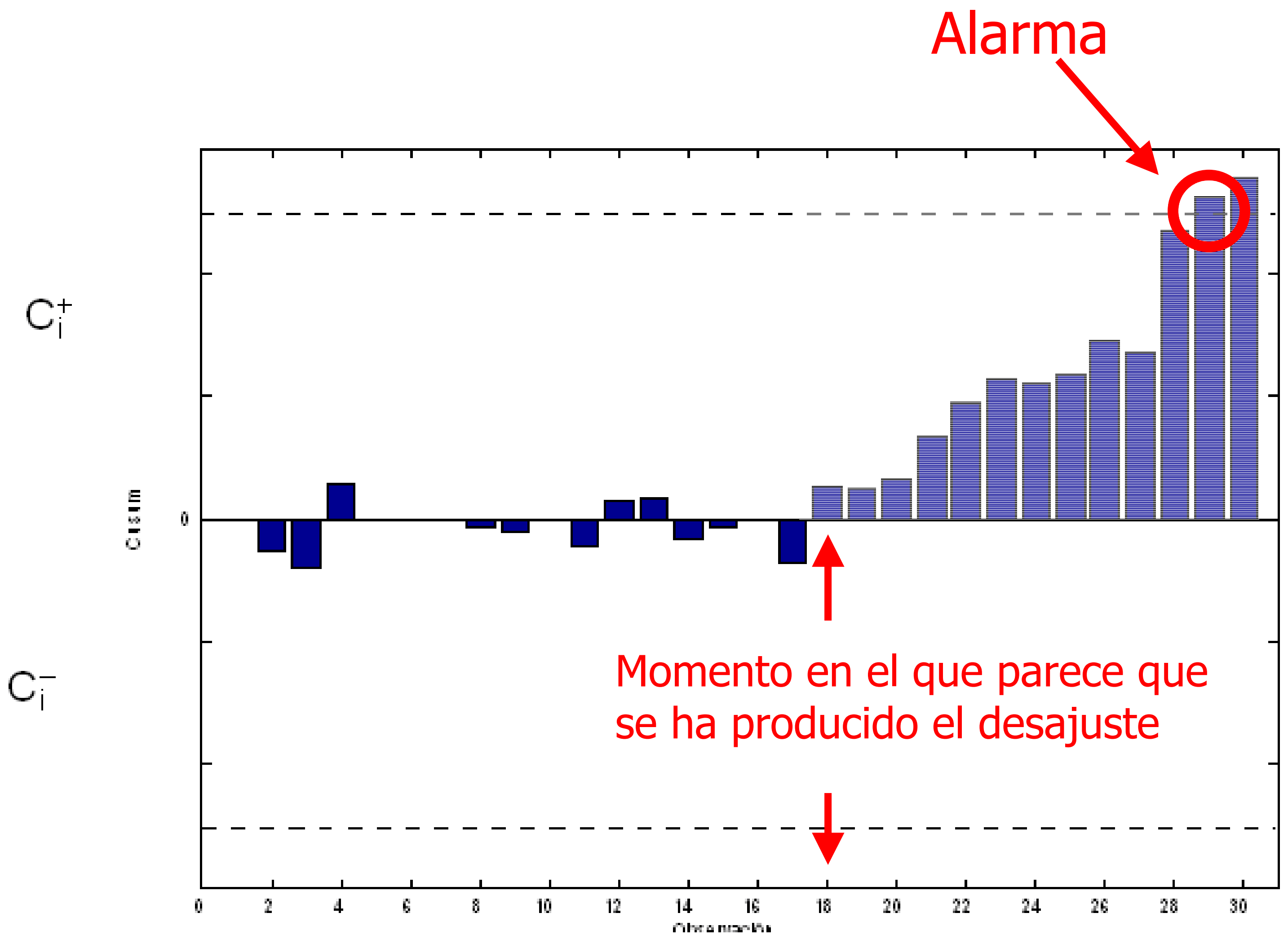
negativas	
5)	C_i^-
	0
	2.6
	3.9



Observación	Tiempo x_i	Desviaciones positivas $C^+_{i-1} + (x_i - 25)$	C^+_i	Desviaciones negativas $C^-_{i-1} - (x_i - 25)$	C^-_i
1	26.1	1.1	0	-1.1	0
2	19.9	-5.1	0	5.1	2.6
3	21.2	-3.8	0	6.4	3.9



		Desviaciones positivas		Desviaciones negativas	
Observación	Tiempo x_i	$C_{i-1}^{+} + (x_i - 25)$	C_i^{+}	$C_{i-1}^{-} - (x_i - 25)$	C_i^{-}
1	26.1	1.1	0	-1.1	0
2	19.9	-5.1	0	5.1	2.6
3	21.2	-3.8	0	6.4	3.9



5.2 Gráficos CUSUM

El segundo gráfico que veremos es el CUSUM con Plantilla V (V-mask)

Este gráfico CUSUM tiene las siguientes particularidades:

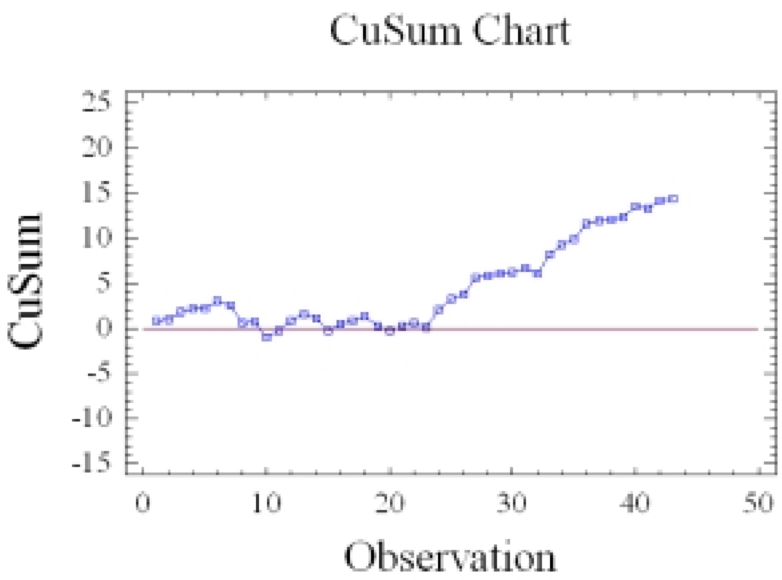
5.2 Gráficos CUSUM

El segundo gráfico que veremos es el CUSUM con Plantilla V (V-mask)

Este gráfico CUSUM tiene las siguientes particularidades:

- Dibuja la evolución de C_i

$$C_i = C_{i-1} + (x_i - \mu_0)$$

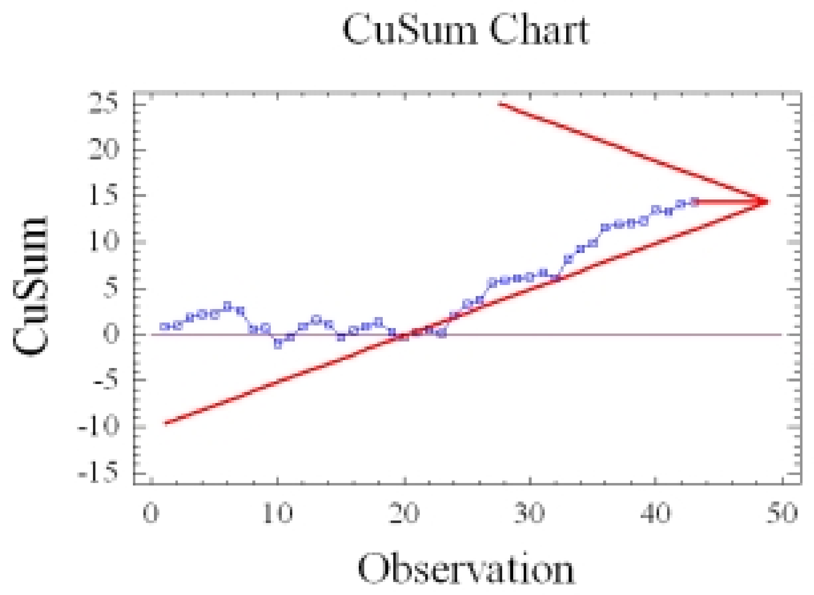


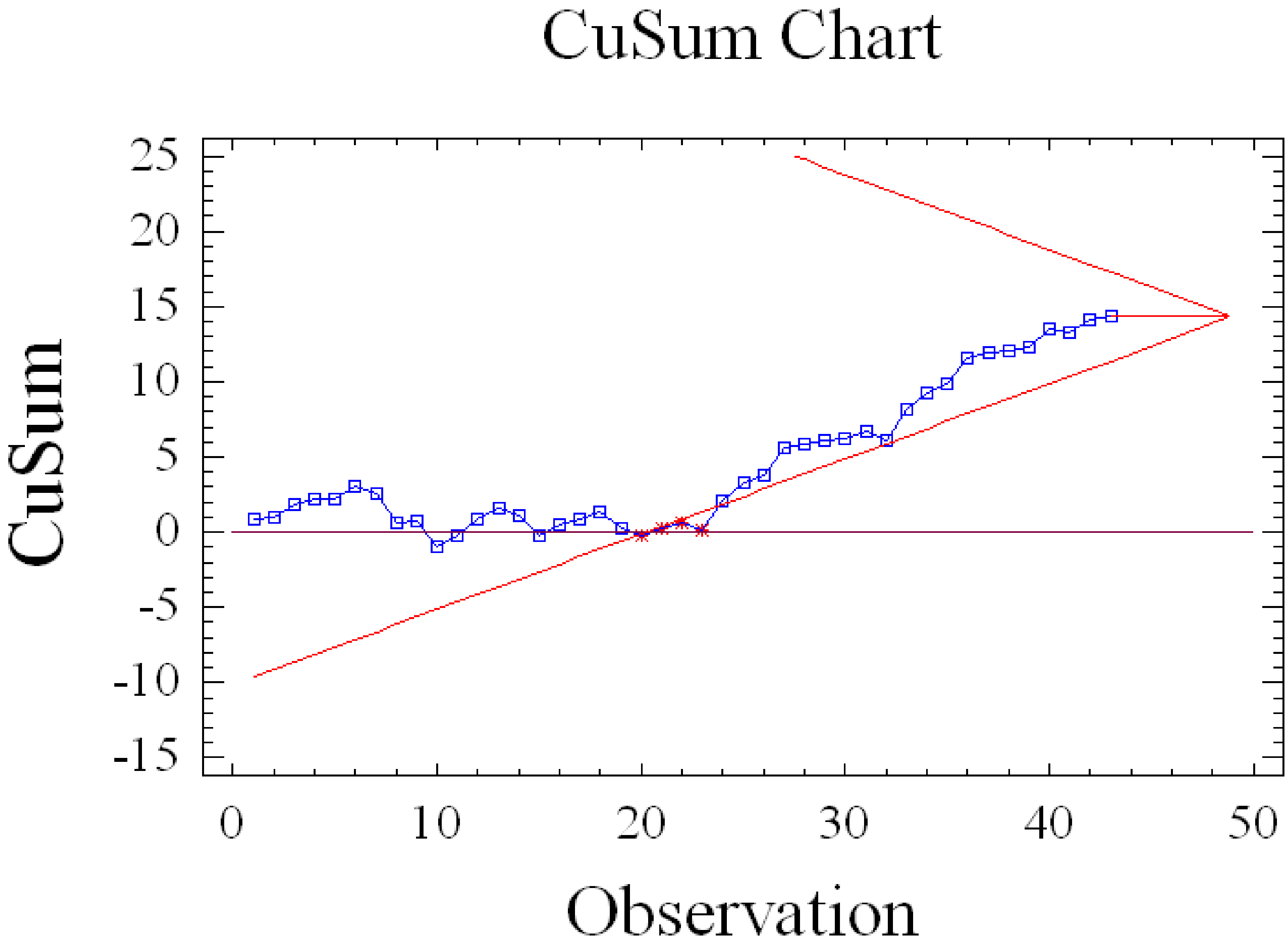
5.2 Gráficos CUSUM

El segundo gráfico que veremos es el CUSUM con Plantilla V (V-mask)

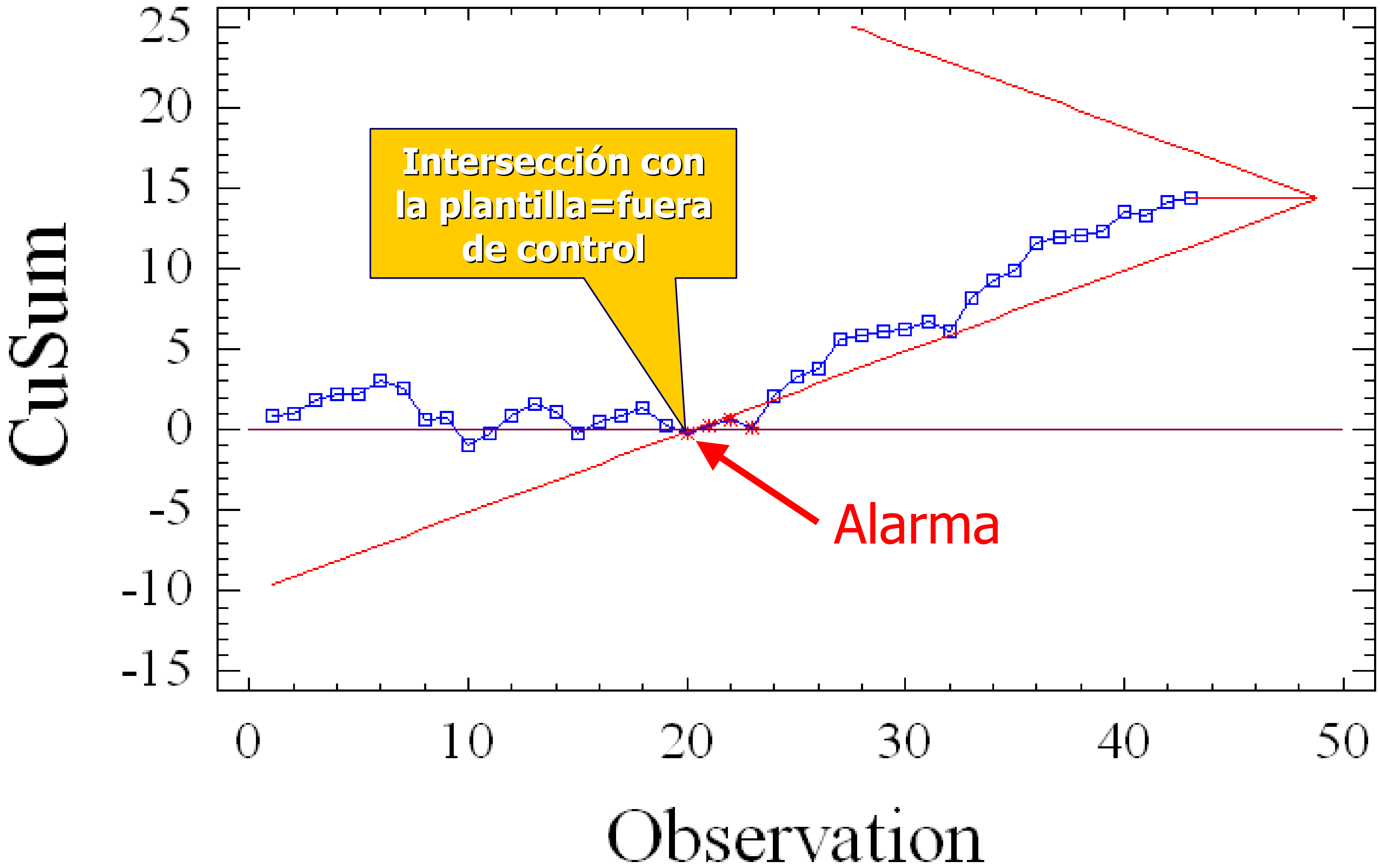
Este gráfico CUSUM tiene las siguientes particularidades:

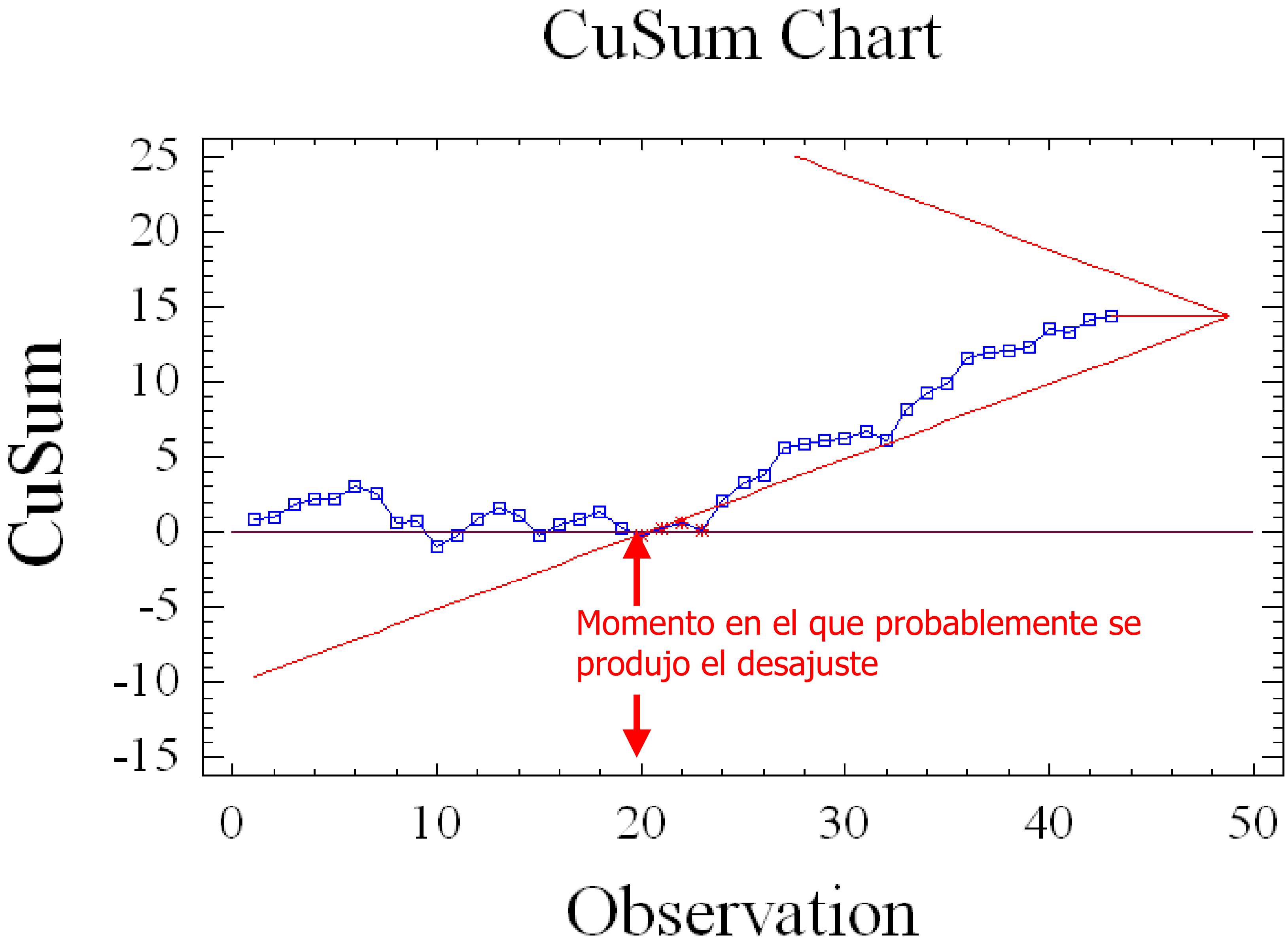
- Utiliza una plantilla en V como límites de control




CuSum Chart
25
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
0
10
20
30
40
50
CuSum
Observation

CuSum Chart


Intersección con la plantilla=fuera de control
Alarma
CuSum
Observation
25
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
0
10
20
30
40
50


CuSum Chart
CuSum
Observation
25
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
0
10
20
30
40
50
Momento en el que probablemente se produjo el desajuste

Capítulo 5: Gráficos de Control con Memoria

5.3 Gráfico EWMA

EWMA=Exponentially Weighted Moving Average

(Medias móviles con ponderación exponencial)

Sea x la variable de calidad de interés. El gráfico EWMA representa la evolución del estadístico

$$y_i = \lambda x_i + (1-\lambda) y_{i-1}$$

con $y_0 = \mu_0$

5.3 Gráfico EWMA

EWMA=Exponentially Weighted Moving Average

(Medias móviles con ponderación exponencial)

Sea x la variable de calidad de interés. El gráfico EWMA representa la evolución del estadístico

$$y_i = \lambda x_i + (1 - \lambda) y_{i-1}$$

con $y_0 = \mu_0$

$0 < \lambda \leq 1$ (lo decide el analista)

$$y_i = \lambda x_i + (1-\lambda) y_{i-1} = \lambda x_i + \lambda(1-\lambda) x_{i-1} + (1-\lambda)^2 y_{i-2}$$

$$y_{i-1} = \lambda x_{i-1} + (1-\lambda) y_{i-2}$$

$$y_i = \lambda x_i + (1-\lambda) y_{i-1} = \lambda x_i + \lambda(1-\lambda) x_{i-1} + (1-\lambda)^2 y_{i-2}$$

$$y_{i-1} = \lambda x_{i-1} + (1-\lambda) y_{i-2}$$

$$y_{i-2} = \lambda x_{i-2} + (1-\lambda) y_{i-3}$$

$$y_i = \lambda x_i + (1-\lambda)y_{i-1} = \lambda x_i + \lambda(1-\lambda)x_{i-1} + (1-\lambda)^2 y_{i-2}$$

$$y_{i-1} = \lambda x_{i-1} + (1-\lambda)y_{i-2}$$

$$y_{i-2} = \lambda x_{i-2} + (1-\lambda)y_{i-3}$$

Sustituyendo sucesivamente...

$$y_i = \lambda(1-\lambda)^0 x_i + \lambda(1-\lambda)^1 x_{i-1} + \lambda(1-\lambda)^2 x_{i-2} + \lambda(1-\lambda)^3 x_{i-3} + \lambda(1-\lambda)^4 x_{i-4} + \cdots$$

$$y_i = \lambda x_i + (1-\lambda) y_{i-1} = \lambda x_i + \lambda(1-\lambda) x_{i-1} + (1-\lambda)^2 y_{i-2}$$

$$y_{i-1} = \lambda x_{i-1} + (1-\lambda) y_{i-2}$$

$$y_{i-2} = \lambda x_{i-2} + (1-\lambda) y_{i-3}$$

Sustituyendo sucesivamente...

$$y_i = \underline{\lambda(1-\lambda)^0} x_i + \underline{\lambda(1-\lambda)^1} x_{i-1} + \underline{\lambda(1-\lambda)^2} x_{i-2} + \underline{\lambda(1-\lambda)^3} x_{i-3} + \underline{\lambda(1-\lambda)^4} x_{i-4} + \cdots$$

Si $\lambda < 1$ los coeficientes van disminuyendo con un decaimiento exponencial

$$y_i = \lambda x_i + (1-\lambda)y_{i-1} = \lambda x_i + \lambda(1-\lambda)x_{i-1} + (1-\lambda)^2 y_{i-2}$$

$$y_{i-1} = \lambda x_{i-1} + (1-\lambda)y_{i-2}$$

$$y_{i-2} = \lambda x_{i-2} + (1-\lambda)y_{i-3}$$

Sustituyendo sucesivamente...

$$y_i = \underline{\lambda(1-\lambda)^0} x_i + \underline{\lambda(1-\lambda)^1} x_{i-1} + \underline{\lambda(1-\lambda)^2} x_{i-2} + \underline{\lambda(1-\lambda)^3} x_{i-3} + \underline{\lambda(1-\lambda)^4} x_{i-4} + \cdots$$

Además se verifica que suman 1:

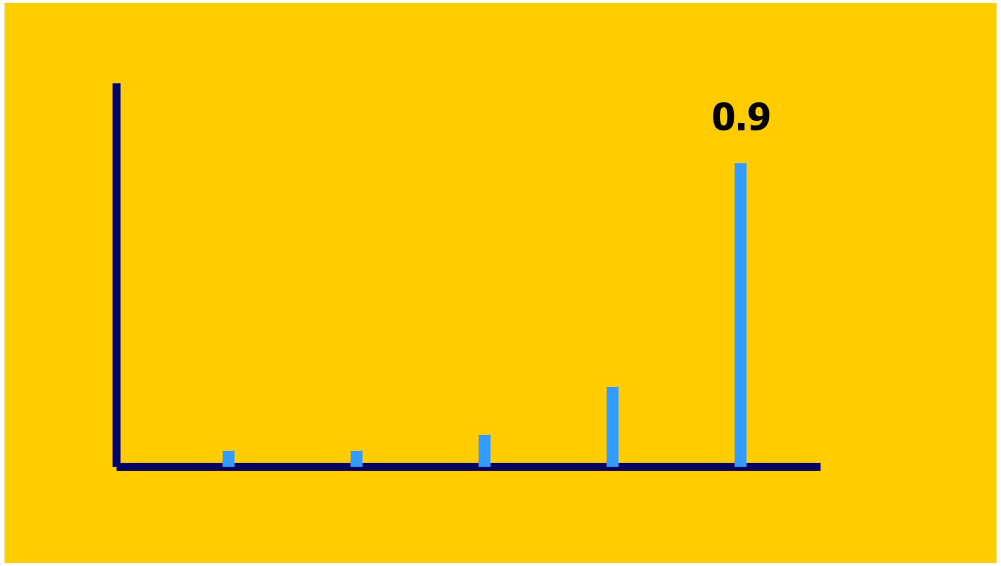
y_i es un promedio de los valores $x_i, x_{i-1}, \ldots$

Ejemplo: $\lambda = 0.9$

$$y_i = \underbrace{\lambda(1-\lambda)^0}_{0.9} x_i + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^1}_{0.09} x_{i-1} + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^2}_{0.009} x_{i-2} + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^3}_{0.0009} x_{i-3} + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^4}_{0.00009} x_{i-4} + \cdots$$

Ejemplo: $\lambda = 0.9$

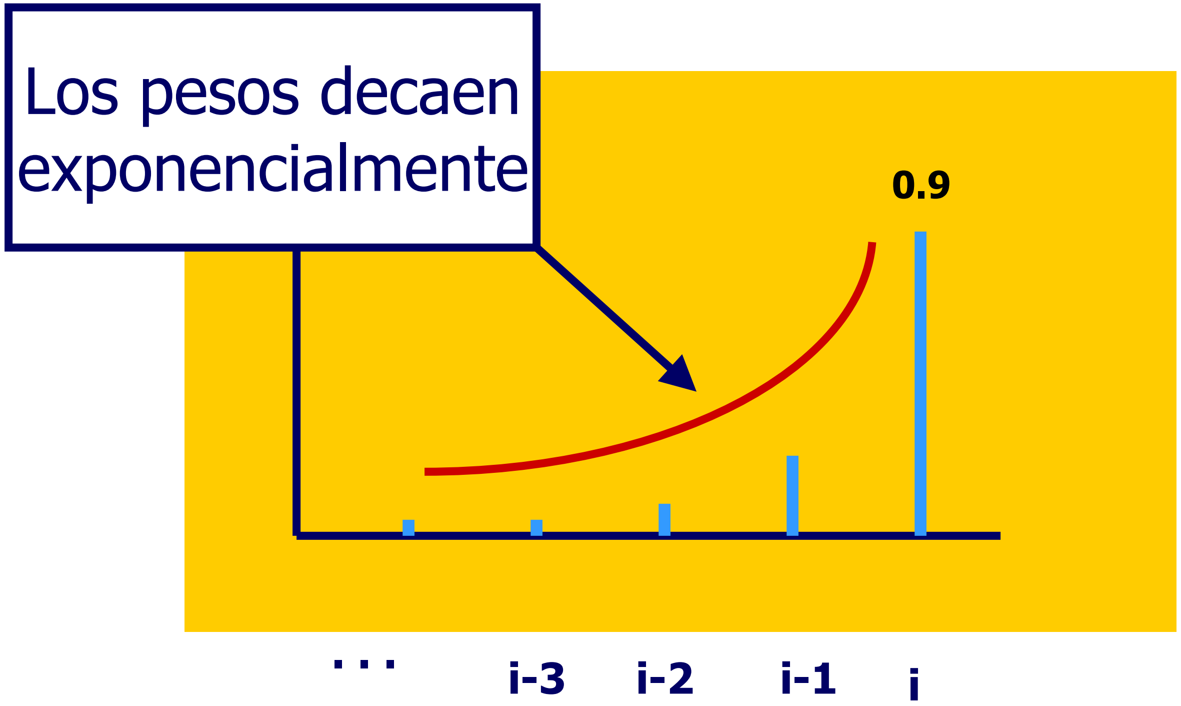
$$y_i = \underbrace{\lambda(1-\lambda)^0}_{0.9} x_i + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^1}_{0.09} x_{i-1} + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^2}_{0.009} x_{i-2} + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^3}_{0.0009} x_{i-3} + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^4}_{0.00009} x_{i-4} + \cdots$$



. . .   i-3   i-2   i-1   i

Ejemplo: $\lambda = 0.9$

$$y_i = \underbrace{\lambda(1-\lambda)^0}_{0.9} x_i + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^1}_{0.09} x_{i-1} + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^2}_{0.009} x_{i-2} + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^3}_{0.0009} x_{i-3} + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^4}_{0.00009} x_{i-4} + \cdots$$



Ejemplo: $\lambda = 0.9$

$$y_i = \underbrace{\lambda(1-\lambda)^0}_{0.9} x_i + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^1}_{0.09} x_{i-1} + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^2}_{0.009} x_{i-2} + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^3}_{0.0009} x_{i-3} + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^4}_{0.00009} x_{i-4} + \cdots$$

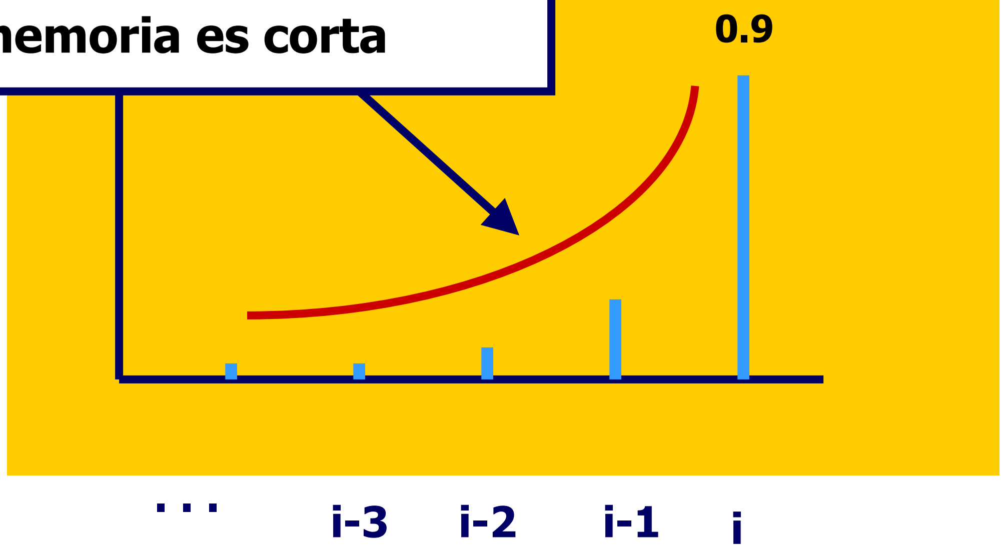
Además, decaen muy rápido

⇩

El pasado tiene poco valor

⇩

La memoria es corta

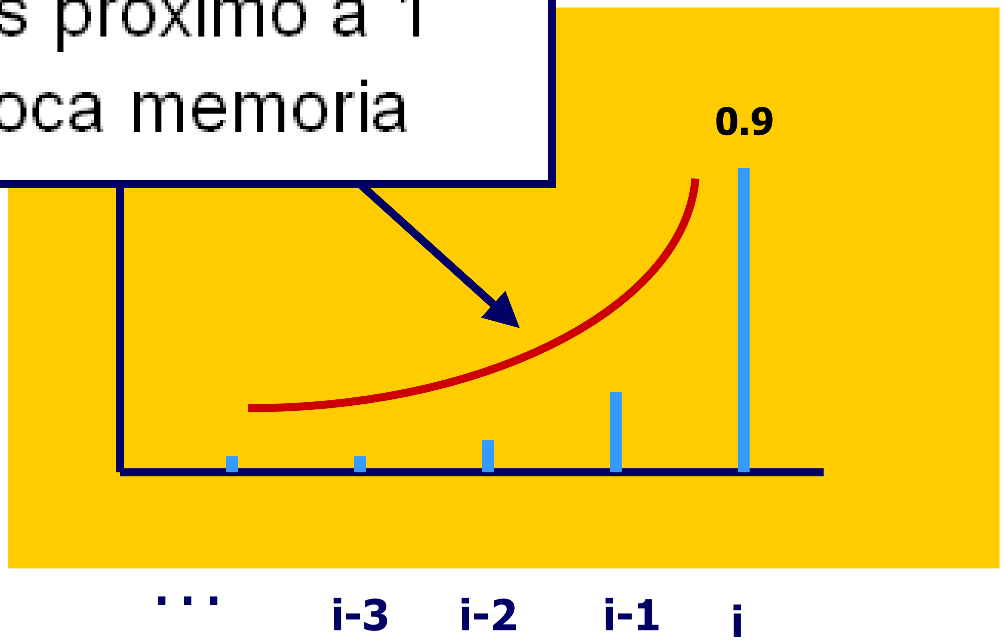


Ejemplo: $\lambda = 0.9$

$$y_i = \underbrace{\lambda(1-\lambda)^0}_{0.9} x_i + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^1}_{0.09} x_{i-1} + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^2}_{0.009} x_{i-2} + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^3}_{0.0009} x_{i-3} + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^4}_{0.00009} x_{i-4} + \cdots$$

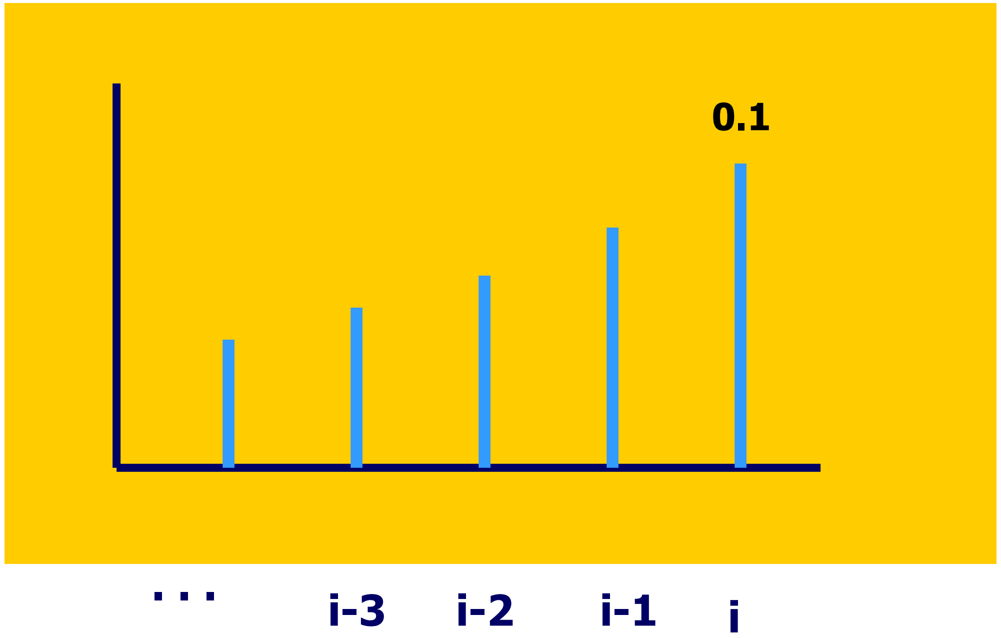
Conclusión:

Si λ es próximo a 1 hay poca memoria



Ejemplo: $\lambda = 0.1$

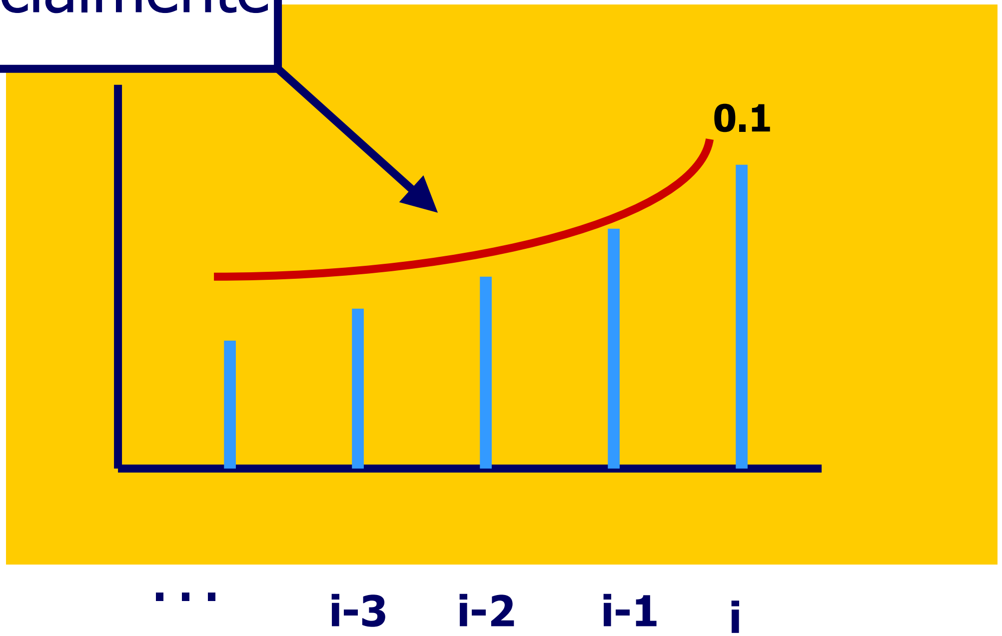
$$y_i = \underbrace{\lambda(1-\lambda)^0}_{0.1} x_i + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^1}_{0.09} x_{i-1} + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^2}_{0.081} x_{i-2} + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^3}_{0.079} x_{i-3} + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^4}_{0.0656} x_{i-4} + \cdots$$



Ejemplo: $\lambda = 0.1$

$$y_i = \underbrace{\lambda(1-\lambda)^0}_{0.1} x_i + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^1}_{0.09} x_{i-1} + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^2}_{0.081} x_{i-2} + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^3}_{0.079} x_{i-3} + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^4}_{0.0656} x_{i-4} + \cdots$$

Los pesos decaen exponencialmente



Ejemplo: $\lambda = 0.1$

$$y_i = \underbrace{\lambda(1-\lambda)^0}_{0.1} x_i + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^1}_{0.09} x_{i-1} + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^2}_{0.081} x_{i-2} + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^3}_{0.079} x_{i-3} + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^4}_{0.0656} x_{i-4} + \cdots$$

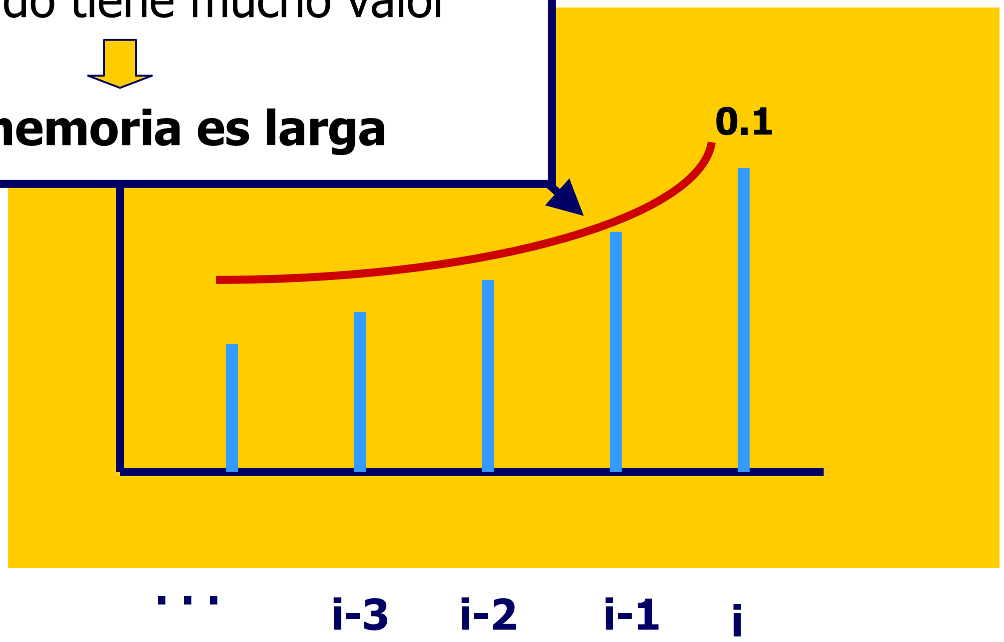
Ahora decaen muy despacio

⇩

El pasado tiene mucho valor

⇩

La memoria es larga

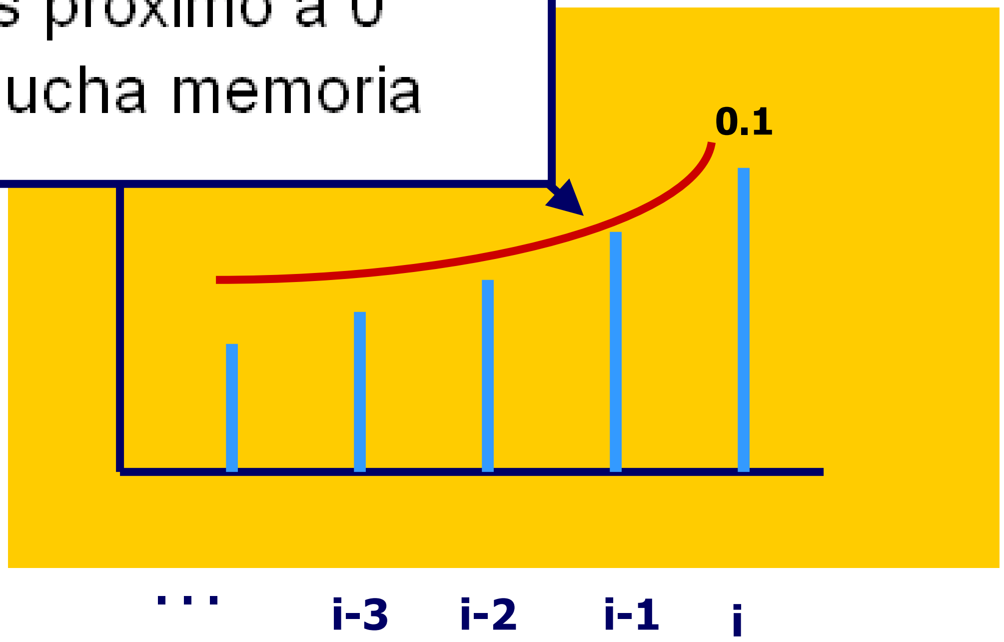


Ejemplo: $\lambda = 0.1$

$$y_i = \underbrace{\lambda(1-\lambda)^0}_{0.1} x_i + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^1}_{0.09} x_{i-1} + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^2}_{0.081} x_{i-2} + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^3}_{0.079} x_{i-3} + \underbrace{\lambda(1-\lambda)^4}_{0.0656} x_{i-4} + \cdots$$

Conclusión:

Si λ es próximo a 0
hay mucha memoria



Conclusión:

Si λ es próximo a 1
hay poca memoria

Conclusión:

Si λ es próximo a 0
hay mucha memoria

Conclusión:

Si λ es próximo a 1
hay poca memoria

Conclusión:

Si λ es próximo a 0
hay mucha memoria

Si queremos detectar un desajuste pequeño, necesitaremos acumular la información de muchos periodos para que el desajuste pueda apreciarse

Conclusión:

Si λ es próximo a 1
hay poca memoria

Conclusión:

Si λ es próximo a 0
hay mucha memoria

Si queremos detectar un desajuste pequeño, necesitaremos acumular la información de muchos periodos para que el desajuste pueda apreciarse

$\Downarrow$

Para detectar desajustes pequeños elegiremos un λ pequeño

Conclusión:

Si λ es próximo a 1
hay poca memoria

Conclusión:

Si λ es próximo a 0
hay mucha memoria

Si queremos detectar un desajuste grande, bastará con la información inmediatamente posterior al desajuste. No debemos esperar a acumular mucha información

Conclusión:

Si λ es próximo a 1
hay poca memoria

Conclusión:

Si λ es próximo a 0
hay mucha memoria

Si queremos detectar un desajuste grande, bastará con la información inmediatamente posterior al desajuste. No debemos esperar a acumular mucha información

Para detectar desajustes grandes elegiremos un λ grande

Conclusión:

Si λ es próximo a 1
hay poca memoria

Conclusión:

Si λ es próximo a 0
hay mucha memoria

Usualmente $0.05 \leq \lambda \leq 0.25$

Gráfico EWMA

$$\begin{aligned} \text{LCS} &= E(y_i) + L\sqrt{\text{Var}(y_i)} \\ \text{L. Central} &= E(y_i) \\ \text{LCI} &= E(y_i) - L\sqrt{\text{Var}(y_i)} \end{aligned}$$

Gráfico EWMA

$$\text{LCS} = E(y_i) + L\sqrt{\text{Var}(y_i)}$$

$$\text{L. Central} = E(y_i)$$

$$\text{LCI} = E(y_i) - L\sqrt{\text{Var}(y_i)}$$

$$\text{Var}(y_i) = \sigma^2 \frac{\lambda\left[1-(1-\lambda)^{2i}\right]}{2-\lambda}$$

$$3$$

$$E(y_i) = \mu_0$$

Gráfico EWMA

$$\text{LCS} = E(y_i) + L\sqrt{\text{Var}(y_i)}$$

$$\text{L. Central} = E(y_i)$$

$$\text{LCI} = E(y_i) - L\sqrt{\text{Var}(y_i)}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{LCS} = \mu_0 + 3\sigma\sqrt{\frac{\lambda\left[1-(1-\lambda)^{2i}\right]}{2-\lambda}}$$

$$\text{L. Central} = \mu_0$$

$$\text{LCI} = \mu_0 - 3\sqrt{\frac{\lambda\left[1-(1-\lambda)^{2i}\right]}{2-\lambda}}$$

Gráfico EWMA

$$\text{LCS} = E(y_i) + L\sqrt{\text{Var}(y_i)}$$

$$\text{L. Central} = E(y_i)$$

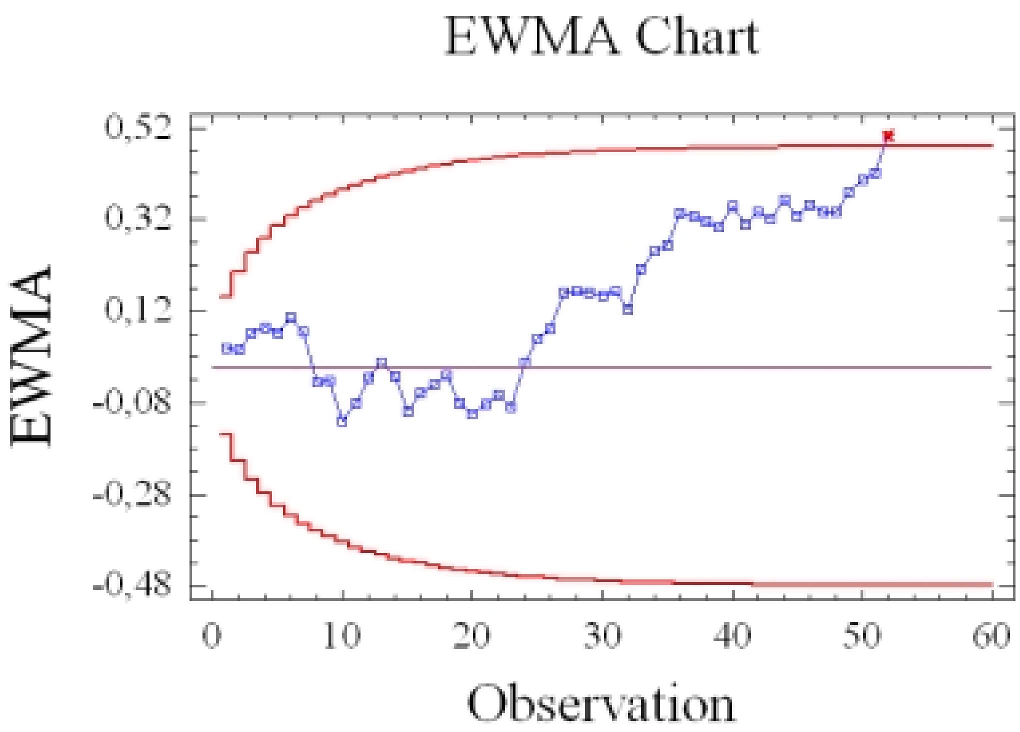
$$\text{LCI} = E(y_i) - L\sqrt{\text{Var}(y_i)}$$

$$\text{LCS} = \mu_0 + 3\sigma\sqrt{\frac{\lambda\left[1-(1-\lambda)^{2i}\right]}{2-\lambda}}$$

Van aumentando

$$\text{L. Central} = \mu_0$$

$$\text{LCI} = \mu_0 - 3\sqrt{\frac{\lambda\left[1-(1-\lambda)^{2i}\right]}{2-\lambda}}$$

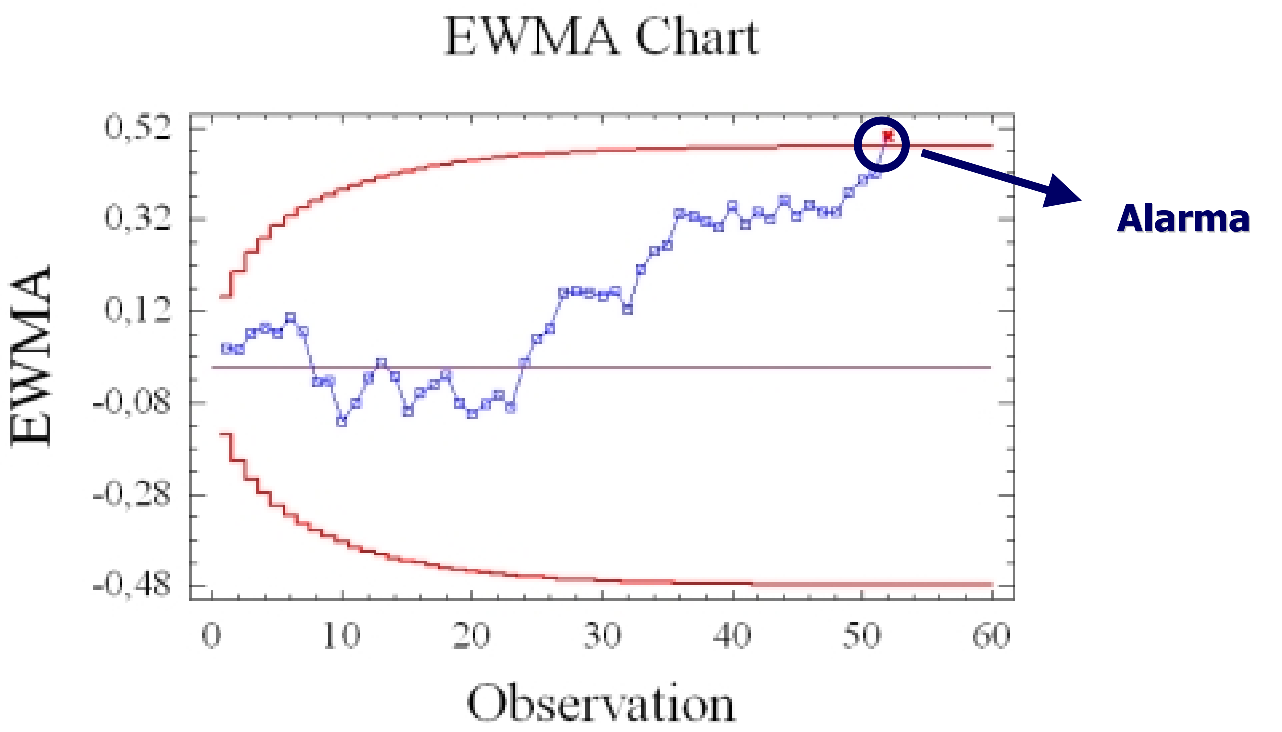


$$LCS = \mu_0 + 3\sigma\sqrt{\frac{\lambda[1-(1-\lambda)^{2i}]}{2-\lambda}}$$

Van aumentando

$$\text{L. Central} = \mu_0$$

$$LCI = \mu_0 - 3\sqrt{\frac{\lambda[1-(1-\lambda)^{2i}]}{2-\lambda}}$$



$$\text{LCS} = \mu_0 + 3\sigma\sqrt{\frac{\lambda\left[1-(1-\lambda)^{2i}\right]}{2-\lambda}}$$

Van aumentando

$$\text{L. Central} = \mu_0$$

$$\text{LCI} = \mu_0 - 3\sqrt{\frac{\lambda\left[1-(1-\lambda)^{2i}\right]}{2-\lambda}}$$

Capítulo 5: Gráficos de Control con Memoria

5.1 Introducción

5.2 Gráfico CUSUM

5.3 Gráfico EWMA

5.4 Gráfico de Medias Móviles

5.4 Gráfico de Medias Móviles

Sea x la variable de calidad de interés. El gráfico de medias móviles representa la evolución del estadístico

$$y_i = \frac{x_i + x_{i-1} + \cdots + x_{i-m+1}}{m}$$

Por ejemplo, si m=3

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x_1, \\
y_2 &= \frac{x_1 + x_2}{2}, \\
y_3 &= \frac{x_3 + x_2 + x_1}{3}, \\
y_4 &= \frac{x_4 + x_3 + x_2}{3}, \\
y_5 &= \frac{x_5 + x_4 + x_3}{3}, \\
&\vdots \\
y_i &= \frac{1}{3}x_i + \frac{1}{3}x_{i-1} + \frac{1}{3}x_{i-2}.
\end{aligned}
$$

Por ejemplo, si m=3

Bajo control

$$y_1 = x_1, \longrightarrow E(y_1) = \mu_0 \qquad \sqrt{\mathrm{Var}(y_1)} = \sigma$$

$$y_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \longrightarrow E(y_2) = \mu_0 \qquad \sqrt{\mathrm{Var}(y_2)} = \sigma/\sqrt{2}$$

$$y_3 = \frac{x_3 + x_2 + x_1}{3}, \longrightarrow E(y_3) = \mu_0 \qquad \sqrt{\mathrm{Var}(y_3)} = \sigma/\sqrt{3}$$

$$y_4 = \frac{x_4 + x_3 + x_2}{3}, \longrightarrow E(y_4) = \mu_0 \qquad \sqrt{\mathrm{Var}(y_4)} = \sigma/\sqrt{3}$$

$$y_5 = \frac{x_5 + x_4 + x_3}{3}, \longrightarrow E(y_5) = \mu_0 \qquad \sqrt{\mathrm{Var}(y_5)} = \sigma/\sqrt{3}$$

$$\vdots$$

$$y_i = \frac{1}{3}x_i + \frac{1}{3}x_{i-1} + \frac{1}{3}x_{i-2}. \longrightarrow E(y_i) = \mu_0 \qquad \sqrt{\mathrm{Var}(y_i)} = \sigma/\sqrt{3}$$

Por ejemplo, si m=3

Bajo control

$$y_1 = x_1, \qquad E(y_1) = \mu_0 \qquad \sqrt{\mathrm{Var}(y_1)} = \sigma$$

$$y_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad E(y_2) = \mu_0 \qquad \sqrt{\mathrm{Var}(y_2)} = \sigma/\sqrt{2}$$

$$y_3 = \frac{x_3 + x_2 + x_1}{3}, \qquad E(y_3) = \mu_0 \qquad \sqrt{\mathrm{Var}(y_3)} = \sigma/\sqrt{3}$$

$$y_4 = \frac{x_4 + x_3 + x_2}{3}, \qquad E(y_4) = \mu_0 \qquad \sqrt{\mathrm{Var}(y_4)} = \sigma/\sqrt{3}$$

$$y_5 = \frac{x_5 + x_4 + x_3}{3}, \qquad \sqrt{\mathrm{Var}(y_5)} = \sigma/\sqrt{3}$$

$$\vdots$$

$$y_i = \frac{1}{3}x_i + \frac{1}{3}x_{i-1} + \frac{1}{3}x_{i-2}. \qquad \sqrt{\mathrm{Var}(y_i)} = \sigma/\sqrt{3}$$

La varianza aumenta hasta que se han analizado m observaciones

Gráfico de Medias Móviles

$$\text{para } i < m$$

$$LCS = \mu_0 + 3\frac{\sigma}{\sqrt{i}}$$

$$\text{L. Central} = \mu_0$$

$$LCI = \mu_0 - 3\frac{\sigma}{\sqrt{i}}$$

Gráfico de Medias Móviles

para $i < m$

$$\boxed{\begin{aligned} LCS &= \mu_0 + 3\frac{\sigma}{\sqrt{i}} \\ \text{L. Central} &= \mu_0 \\ LCI &= \mu_0 - 3\frac{\sigma}{\sqrt{i}} \end{aligned}}$$

Los límites van disminuyendo

Gráfico de Medias Móviles

para $i < m$

$$LCS = \mu_0 + 3\frac{\sigma}{\sqrt{i}}$$

$$\text{L. Central} = \mu_0$$

$$LCI = \mu_0 - 3\frac{\sigma}{\sqrt{i}}$$

Los límites van disminuyendo

para $i \geq m$

$$LCS = \mu_0 + 3\frac{\sigma}{\sqrt{m}}$$

$$\text{L. Central} = \mu_0$$

$$LCI = \mu_0 - 3\frac{\sigma}{\sqrt{m}}$$

Gráfico de Medias Móviles

para $i < m$

$$\boxed{\begin{aligned} LCS &= \mu_0 + 3\frac{\sigma}{\sqrt{i}} \\ \text{L. Central} &= \mu_0 \\ LCI &= \mu_0 - 3\frac{\sigma}{\sqrt{i}} \end{aligned}}$$

Los límites van disminuyendo

para $i \geq m$

$$\boxed{\begin{aligned} LCS &= \mu_0 + 3\frac{\sigma}{\sqrt{m}} \\ \text{L. Central} &= \mu_0 \\ LCI &= \mu_0 - 3\frac{\sigma}{\sqrt{m}} \end{aligned}}$$

Límites constantes

MA Chart